

B-I-HOCHSCHULTASCHENBÜCHER

Das Taschenbuch der reinen Wissenschaft

- | | |
|---|---------------|
| 1 Heisenberg, Physikal. Prinzipien der Quantentheorie | kart. 3,80 DM |
| 3 Weizel, Einführung in die Physik I | kart. 3,80 DM |
| 4 Weizel, Einführung in die Physik II | kart. 3,80 DM |
| 5 Weizel, Einführung in die Physik III | kart. 3,80 DM |
| 6 Schulten/Güth, Reaktorphysik I | kart. 3,80 DM |
| 7 Becker, Einführung in die Astronomie I | kart. 3,80 DM |
| 9/9a Süssmann, Einführung in die Quantenmechanik | kart. 6,80 DM |
| 10/10a/10b Preuß, Grundriß der Quantenchemie | kart. 9,80 DM |
| 11 Schulten/Güth, Reaktorphysik II | kart. 3,80 DM |
| 12 Teichmann, Einführung in die Atomphysik | kart. 3,80 DM |
| 13 Rottmann, Mathematische Formelsammlung | kart. 3,80 DM |
| 14/14a Rottmann, Mathematische Funktionstabellen | kart. 6,80 DM |
| 15/15a Peschl, Analytische Geometrie | kart. 6,80 DM |
| 16 Eisenbud/Wigner, Einführung in die Kernphysik | kart. 3,80 DM |
| 17/17a Rottmann, Siebenstellige dekadische Logarithmen | kart. 6,80 DM |
| 18/18a de Groot, Thermodynamik irreversibler Prozesse | kart. 6,80 DM |
| 19 Erwe, Gewöhnliche Differentialgleichungen | kart. 3,80 DM |
| 20/20a/20b Schurig/Götz/Schäfers, Himmelsatlas | Hln. 9,80 DM |
| 21 Teichmann, Halbleiter | kart. 3,80 DM |
| 22/22a Kaiser, Chromatographie in der Gasphase I | kart. 6,80 DM |
| 23 Kaiser, Chromatographie in der Gasphase II | kart. 3,80 DM |
| 24/24a Kaiser, Chromatographie in der Gasphase III | kart. 6,80 DM |
| 25 Lorenzen, Metamathematik | kart. 3,80 DM |
| 26/26a/26b Rottmann, Siebenstellige dekadische Logarithmen der trigonometrischen Funktionen | kart. 9,80 DM |
| 27 Staude, Photochemie | kart. 3,80 DM |
| 28 Weizel, Physikalische Formelsammlung I | kart. 3,80 DM |
| 29 Billel, Grundlagen der therm. Flüssigkeitszerlegung | kart. 3,80 DM |
| 30/30a Erwe, Differential- und Integralrechnung I | kart. 6,80 DM |
| 31/31a Erwe, Differential- und Integralrechnung II | kart. 6,80 DM |
| 32 Scherrer/Stoll, Physikalische Übungsaufgaben I | kart. 3,80 DM |
| 33 Scherrer/Stoll, Physikalische Übungsaufgaben II | kart. 3,80 DM |
| 35 Meschkowski, Unendliche Reihen | kart. 3,80 DM |
| 38/38a Gericke, Theorie der Verbände | kart. 6,80 DM |
| 39/39a Teichmann, Physikalische Anwendung der Vektor- und Tensorrechnung | kart. 6,80 DM |
| 40 Bohrman, Bahnen künstlicher Satelliten | kart. 3,80 DM |
| 43 Preuß, Quantentheoretische Chemie I | kart. 3,80 DM |
| 50 Mittelstaedt, Philos. Probleme der modernen Physik | kart. 3,80 DM |
| 51 Meschkowski, Reihenentwicklung in der math. Physik | kart. 3,80 DM |
| 54 Sneddon, Mathematische Formelsammlung II | kart. 3,80 DM |

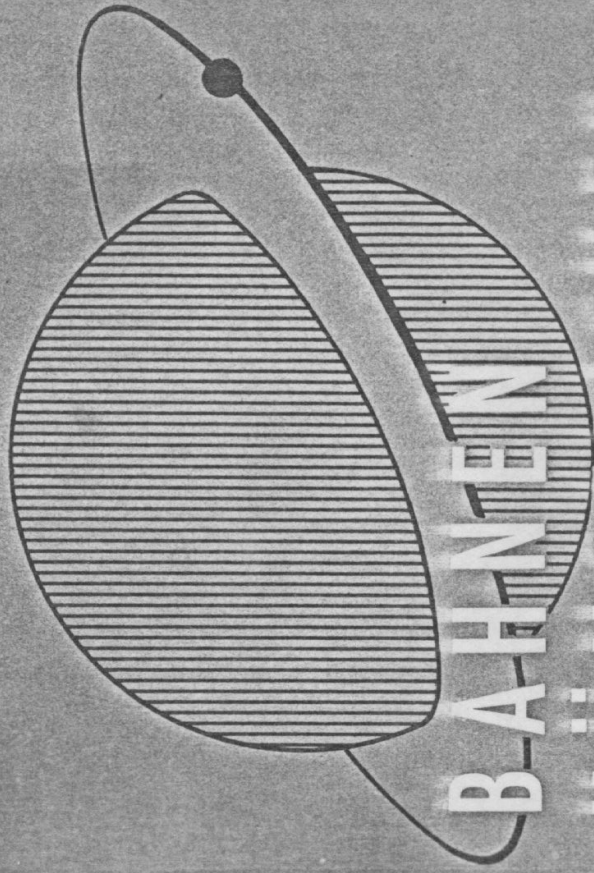
In Vorbereitung:

Becker, Einführung in die Astronomie II · Chintchin, Grundlagen der statistischen Mechanik · Edmonds, Drehimpulse in der Quantenmechanik · Giese, Methoden der Weltraumforschung · Laugwitz, Ingenieur-Mathematik I, II, III, IV · Marshak/Sudarshan, Einführung in die Physik der Elementarteilchen · Müller, Anleitung für den Einsatz von elektronischen Rechenmaschinen · Rolf/Müller, Astronomisches Begriffsörterbuch · Pfeiler, Angewandte Regeltechnik I, II · Preuß, Quantentheoretische Chemie II, III, IV · V. Scherrer/Stoll, Physikalische Übungsaufgaben III · Süssmann, Einführung in die Thermodynamik · Thouless, Quantenmechanik der Mehrkörpersysteme · Uhde, Math. Funktionstabellen II (Höhere Funktionen) · Weizel, Physik. Formelsammlung II, III.

Weitere Bände folgen · Stand des Verzeichnisses: 1. April 1963

BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT · MANNHEIM
HOCHSCHULTASCHENBÜCHER VERLAG

ALFRED BOHRMANN



BAHNEN
KÜNSTLICHER
SATELLITEN

B.I.

HOCHSCHULTASCHENBÜCHER

BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Einleitung	9
KAPITEL I	
<i>Astronomische und geophysikalische Grundlagen</i>	
1. Figur der Erde	11
2. Koordinatensysteme	13
3. Zeitzählung	17
4. Die Atmosphäre	19
KAPITEL II	
<i>Satellitenbahnen und Keplersche Bewegung in der Ellipse</i>	
1. Allgemeines über Satelliten und Satellitenbahnen	22
2. Bahnelemente; Umlaufzeit und mittlere Entfernung	23
3. Die Bewegung in der Ellipse	26
4. Der Ort im Raum	29
5. Die Bahnprojektion auf die Erdoberfläche	30
6. Genäherte Berechnung von Azimut und Höhe	37
7. Beispiel zur Berechnung eines Durchgangs für einen bestimmten Beobachtungsort	40
8. Schattenein- und -austritt	44
KAPITEL III	
<i>Kurze Theorie des 2-Körper-Problems für Massenpunkte</i>	
1. Grundgleichungen; Flächen- und Energie-Integral	49
2. Die Bahngleichung	51
3. Das 3. Keplersche Gesetz	52
4. Geschwindigkeit, Bahnform, „Schußweite“	52
5. Die Koordinaten als Funktion der Zeit	57
6. Ortsvektor, Geschwindigkeitsvektor und Bahnelemente; Abschlußbedingungen für eine bestimmte Bahn	58
KAPITEL IV	
<i>Störungsrechnung</i>	
1. Allgemeines über Störungen	60
2. Störungen in den Elementen	60

Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck, auch auszugsweise, verboten
 © Bibliographisches Institut AG · Mannheim 1963
 Gesamtherstellung: Klambt-Druck GmbH, Speyer
 Satz und Druck: Zehnersche Buchdruckerei, Speyer
 Printed in Germany
 A

KAPITEL V

Störungen infolge Abplattung der Erde

1. Das Gravitationsfeld der abgeplatteten Erde	64
2. Die Differentialgleichungen der Bewegung im Gravitationsfeld der abgeplatteten Erde.	77
3. Zerlegung der störenden Kraft in Komponenten	78
4. Die Drehung (Präzession) der Bahnebene	80
5. Die Drehung der Bahnellipse	83
6. Störungen der großen Halbachse und der Exzentrizität; kurzperiodische und langperiodische Störungen	89
7. Umlaufzeit und 3. Keplersches Gesetz	91
8. Änderung des 2. Keplerschen Gesetzes und Störungen im Radiusvektor	95

KAPITEL VI

Der Einfluß des Luftwiderstandes

1. Allgemeines zum Luftwiderstandsgesetz	97
2. Bahnänderungen durch den Luftwiderstand bei einer Kreisbahn	99
3. Bahnänderungen bei elliptischen Bahnen	102
4. Beispiele für den Einfluß des Luftwiderstands	107
5. Die Hochatmosphäre auf Grund der Ergebnisse von Satellitenbeobachtungen	110

KAPITEL VII

Die Bahn des Ballon-Satelliten Echo I

1. Allgemeines; Beobachtungsergebnisse	117
2. Der Strahlungsdruck	119
3. Einfluß des Strahlungsdruckes auf die Bahnelemente	119

KAPITEL VIII

Beobachtungen und Bahnbestimmung

1. Optische Beobachtungen; Helligkeit eines Satelliten	127
2. Radiobeobachtungen; Richtungsmessungen	131
3. Messungen des Dopplereffekts	135
4. Radarbeobachtungen	138
5. Bahnbestimmung	139
<i>Bildnachweis</i>	147
<i>Sachverzeichnis</i>	149

VORWORT

Seit dem Start der ersten künstlichen Satelliten und den ersten Raketenflügen zum Mond und in den interplanetaren Raum ist das Interesse an den damit verbundenen technischen und wissenschaftlichen Problemen stark gewachsen. Auch die zahlreichen neuen Erkenntnisse, die seitdem auf geophysikalischem und astronomischem Gebiet gewonnen wurden, haben hierzu beigetragen, ebenso wie etwa der routinemäßige Einsatz von Wettersatelliten oder der Plan zur Errichtung eines erdumspannenden Fernmeldesystems mittels künstlicher Satelliten als Relaisstationen oder zur Benutzung von Satelliten zum Zweck der Navigation und nicht zuletzt die geglückten Versuche der Erdumkreisung bemannter Satelliten. Auch die gute und lange Sichtbarkeit des Ballonsatelliten Echo I hat das Interesse an den Eigenschaften von Satellitenbahnen in weiten Kreisen geweckt.

Der Einsatz künstlicher Satelliten für die verschiedensten Zwecke erfordert je nach dem dabei verfolgten Ziel eine mehr oder weniger genaue Kenntnis der Gesetze, nach denen sich ein Satellit um die Erde bewegt. So steht neben den technischen Fragen des Abschusses und der Ausführung von Messungen mit Hilfe von mitgeführten Instrumenten das mathematische Problem der Bahntheorie und der Bahnrechnung. Die Theorie der Bewegung eines Satelliten um die Erde ist im wesentlichen ein astronomisches Problem und kann mit den Methoden der Himmelsmechanik behandelt werden, so wie die Astronomen seit der Zeit Keplers und Newtons die Probleme der Planetenbewegung behandeln.

Es gibt über Planetenbewegung und Himmelsmechanik eine Anzahl guter Bücher, doch bis jetzt keines in deutscher Sprache, das sich speziell mit der Anwendung auf die Bahnen künstlicher Satelliten befaßt. Wenn das vorliegende Buch versucht, hier eine Lücke zu schließen, so geschah dies nicht in der Absicht, die recht komplizierte Theorie der Satellitenbahnen vollständig und streng darzustellen. Vielmehr wurde versucht, die wichtigsten Eigenschaften dieser Bewegung mathematisch möglichst einfach abzuleiten und durch Zahlenbeispiele und zahlreiche Abbildungen zu veranschaulichen. Wenn dabei etwas ausführlicher auf

die Bahnverhältnisse von Echo I eingegangen wurde, so dürfte da wegen der interessanten Eigenschaften dieser Bahn berechtigt sein. Auch wurde ein Kapitel aufgenommen, in dem die bisherigen aus Satellitenbeobachtungen gewonnenen Ergebnisse über die Eigenschaften der hohen Atmosphäre kurz besprochen werden.

So ist das Buch nicht als Fachbuch gedacht, allenfalls als eine Einführung – es sind ja nur wenige, die sich von Berufs wegen mit der Theorie von Satellitenbahnen befassen. Seine Hauptaufgabe ist erfüllt, wenn es einen größeren Leserkreis zur Beschäftigung mit den Problemen der Satellitenbahnen, diesem Grenzgebiet der Astronomie und Geophysik und damit auch zur Beschäftigung mit diesen Wissenschaften selbst anregt. Diesem Ziel soll auch die Veröffentlichung in der Reihe der Hochschultaschenbücher des Bibliographischen Instituts dienen.

Heidelberg

Im April 1963

ALFRED BOHRMANN

EINLEITUNG

Seit dem Start des ersten künstlichen Erdsatelliten (Sputnik I) am 4. 10. 1957 sind von seiten der USA und der UdSSR eine große Zahl künstlicher Satelliten in Bahnen um die Erde gebracht worden. Dieses „in die Bahn bringen“ mittels Raketen ist im wesentlichen ein technisches Problem, auf das hier nur insoweit eingegangen wird, als dabei die Frage zu beantworten ist, welche Höhe und Geschwindigkeit der Satellit im Augenblick des Brennschlusses, also beim Übergang in den freien Flug haben muß, um eine gewünschte Bahn zu erzielen (3.6). Die Bahn, die der Satellit von diesem Zeitpunkt an, da also keine „künstlichen“ Kräfte mehr auf ihn wirken, beschreibt, hängt von diesen Anfangsbedingungen und von den Kräften, denen er von da an unterworfen ist, ab. Diese Kräfte sind sehr verschiedener Art:

1) Anziehungskraft der Erde. Sie zwingt ja den Körper zum Umlauf um die Erde. Infolge der Abplattung der Erde und dem relativ geringen Abstand der Satelliten kann man nicht einfach das Newtonsche Gesetz für die Anziehung von Massenpunkten benutzen, d. h. die Erde als Massenpunkt betrachten. Tut man dies doch, so erhält man nur eine erste Näherung für die Bewegung des Satelliten (Keplersche Bewegung), mit der man für jeweils kurze Zeitintervalle – etwa für einen Umlauf – rechnen kann, ohne sehr große Fehler zu begehen. Die Berücksichtigung der Abweichung des Gravitationsfeldes der Erde von der eines Massenpunktes bringt beträchtliche Komplikationen der Theorie mit sich. Dafür gelingt es aber auch, aus Satellitenbeobachtungen Schlüsse zu ziehen auf Figur und Massenverteilung der Erde.

2) Luftwiderstand. Alle bisher in die Bahn gebrachten Satelliten (nicht die Mondraketen und interplanetaren Raumsonden, die ja die Erde nicht umkreisen) sind, je nach ihrer Höhe, mehr oder weniger stark einer Bremsung infolge Zusammenstoß mit Luftmolekülen unterworfen, die ihre ursprüngliche Bahn im Laufe der Zeit verändert und schrumpfen läßt und den Satelliten schließlich zum Absturz bringt. Aus diesen Bahnänderungen hat man wichtige und unerwartete Aufschlüsse über die höchsten Atmosphärenschichten gewonnen.

3) Anziehung von Sonne und Mond. Diese sind gegenüber der Anziehungskraft der Erde nur gering, solange der Satellit nicht in sehr großem Abstand umläuft. Im Folgenden wird hierauf nicht näher eingegangen - es wird nur am Beispiel von Vanguard I (Seite 125), dessen erdfernster Punkt einen Abstand von 1,62 Erdradien hat, gezeigt, wie sich diese außerirdischen Gravitationswirkungen bemerkbar machen.

4) Der durch die Strahlung der Sonne bewirkte Strahlungsdruck. Er macht sich besonders bei Satelliten mit großer Oberfläche und geringer Masse als eine in Richtung der auffallenden Strahlen wirkende Kraft bemerkbar. Besonders groß ist sein Einfluß auf die Bahn des Ballon-Satelliten Echo I, dem daher ein eigenes Kapitel gewidmet ist.

Das Zusammenwirken dieser verschiedenartigen Kräfte bedingt eine komplizierte Bewegung des Satelliten, mit deren Theorie und ihrem Vergleich mit der Beobachtung sich zahlreiche Publikationen der letzten Jahre beschäftigen. Es soll in diesem Buch versucht werden, von der einfachen Keplerschen Bewegung ausgehend, auch die wesentlichen Eigenschaften der gestörten Bewegung zu behandeln und durch Beispiele zu veranschaulichen.

Außerhalb des Rahmens dieses Buches liegt eine Besprechung der verschiedenen, in den einzelnen Satelliten eingebauten Meßgeräte und der mit ihnen durchgeführten Messungen sowie der Probleme, die sich beim Eintritt des Satelliten in die dichteren Atmosphärenschichten kurz vor seinem Verglühen infolge der Luftreibung ergeben, wobei die Bahn sehr raschen Änderungen unterworfen ist (im Folgenden wird einfach, wenn auch nicht zutreffend, von „Absturz“ gesprochen). Dazu gehören auch die Probleme der künstlichen Abbremsung zum Zweck einer Rückkehr zur Erdoberfläche (reentry problem).

$$a = 6378160 \text{ m}$$

$$b = 6356714,5161 \text{ m}$$

$$\alpha = 1/298,247167427$$

MAI 1964, UGGI 1967

$$GM_{\text{Erde}} = 398603 \times 10^9 \text{ m}^3/\text{sec}^2$$

KAPITEL I

ASTRONOMISCHE UND GEOPHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

1. Figur der Erde

Infolge der Erdrotation ist die Erdoberfläche keine Kugel, sondern in großer Näherung ein abgeplattetes Rotationsellipsoid. Fig. 1 stellt einen übertrieben elliptisch gezeichneten Meridianschnitt dar, mit OP als Rotationsachse. Auf Grund umfangreicher geodätischer Vermessungen, verbunden mit der Bestimmung der geographischen Koordinaten vieler Punkte sowie aus Satellitenbeobachtungen kann man im Mittel annehmen:

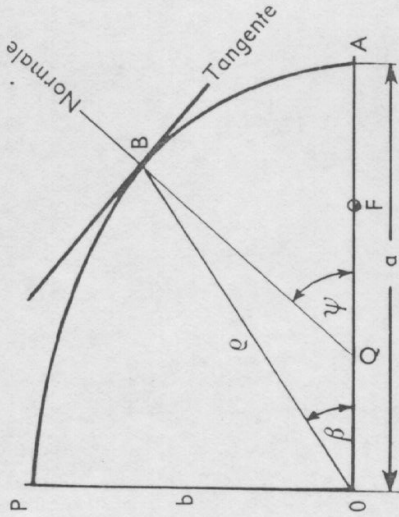


Fig. 1. Meridianschnitt durch die Erde. o = Erdmittelpunkt, β = geozentrische Breite, ψ = geographische Breite.

Äquatorhalbmesser	$a = 6378,20 \pm 0,10 \text{ km}$
Polhalbmesser	$b = 6356,80 \pm 0,10 \text{ km}$
Abplattung	$\alpha = (a - b)/a = 1/298,2 \pm 0,1 = 0,003354$.

In der Geometrie benutzt man als Maß für die Elliptizität die Exzentrizität $e = OF/OA$, wobei $F =$ Brennpunkt. Da $FP = a$ ist, leitet man leicht ab: $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$

Für kleines e gilt dann: $e^2 \approx 2\alpha$

Die Abplattung hat zur Folge, daß man für einen Erdort B zwei geometrisch definierte Werte der Breite unterscheiden muß: die geozentrische Breite β und die geodätische oder geographische Breite ψ als Winkel der Normalen in B mit der Äquatorebene. Daneben gibt es die physikalisch definierte und aus den Beobachtungen zunächst allein mit großer Genauigkeit bestimmbare astronomische Breite φ (Polhöhe) als Winkel der Lotrichtung (Richtung der Schwerkraft*) in B mit der Äquatorebene. Die

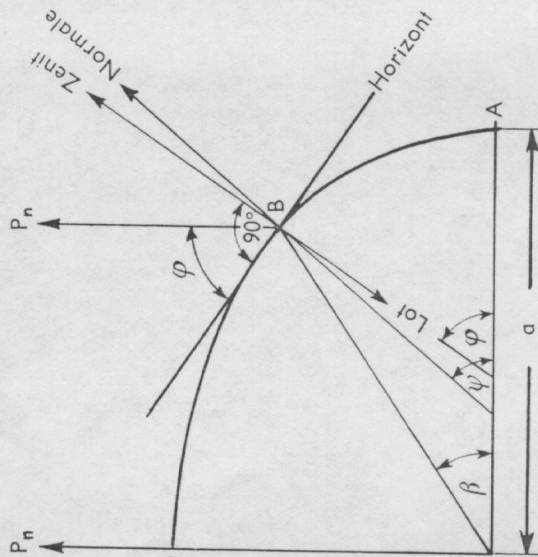


Fig. 2. Definition der Zentrität und der astronomischen Breite φ durch die Lotrichtung.

Winkel φ und ψ unterscheiden sich i. a. nur um geringe Beträge von der Größenordnung von einigen Bogensekunden voneinander. Diese Differenzen, die sog. Lotabweichungen, sind bedingt durch lokale Unsymmetrie in der Massenverteilung in der Umgebung von B . Im Mittel über größere Oberflächengebiete sind sie Null, wäre dies nicht der Fall, dann würde sich die Erde unter der Wirkung der Zentrifugalkraft so weit deformieren, bis

*) Schwerkraft = Resultante aus Gravitations- und Zentrifugalkraft.

die Normale zur Oberfläche und die Lotrichtung zusammenfallen. Lotabweichungen treten auch in Länge auf, so daß man auch geographische und astronomische Längen unterscheiden muß. Im Folgenden soll von den Lotabweichungen abgesehen werden und die astronomischen Werte λ und φ einfach als geographische Länge und Breite bezeichnet werden. Entgegengesetzt zur Richtung des Lotes ist die Zenitrichtung, senkrecht hierzu, durch B , die Horizontebene von B . Eine Parallele zur Rotationsachse durch B zeigt nach dem nördlichen Himmelspol P_n ; der größte Kreis an der Sphäre durch Zenit und Himmelspol ist der astronomische Meridian.

Aus der Geometrie der Ellipse leitet man als Näherungsformel für kleine Werte α ab:

$$(1) \quad \varrho \approx a(1 - \alpha \sin^2 \varphi) = a - 21.40 \sin^2 \varphi \text{ [in km]}$$

$$(2) \quad \beta \approx \varphi - \alpha \sin 2\varphi = \varphi - 11'.5 \sin 2\varphi.$$

Um den genauen Abstand des Beobachtungsortes B vom Erdmittelpunkt zu erhalten, muß zu ϱ noch die Meereshöhe addiert werden.

Als mittleren Erdradius $\bar{\varrho}$ bezeichnet man i. a. den Radius der mit dem Ellipsoid volumengleichen Kugel. Da das Volumen des Ellipsoids $V = \frac{4}{3} \pi a^2 b$ ist, so gilt:

$$\bar{\varrho}^3 = a^2 b = a^3(1 - \alpha).$$

Für kleines α : $\bar{\varrho} = a(1 - \frac{1}{3}\alpha)$.

Vergleich mit (1) gibt für die zu $\bar{\varrho}$ gehörige Breite $\bar{\varphi}$:

$$\sin^2 \bar{\varphi} = \frac{1}{3}.$$

Die Zahlenwerte sind: $\bar{\varrho} = 6371,06 \text{ km}$

$$\bar{\varphi} = 35^\circ 24' (\bar{\beta} = 35^\circ 13').$$

Genauere Analysen von Satelliten-Bahnen haben kürzlich die schon seit langem vermutete Tatsache bestätigt, daß auch der Erdäquator eine geringe Elliptizität besitzt, die Erde also ein 3achsiges Ellipsoid ist. Der größte Äquatorradius in Richtung $\lambda 33^\circ$ West nach $\lambda 147^\circ$ Ost ist hiernach um etwa 200 m länger als der hierzu senkrechte kleinste Radius.

Im Folgenden soll der mittlere Äquatorradius mit R bezeichnet werden.

2. Koordinatensysteme

Das für die Theorie der Satelliten-Bahnen geeigneteste Koordinatensystem ist das Äquatortorsystem der Astronomie: Nullpunkt ist der Erdmittelpunkt, x - y -Ebene = Äquatorebene, wobei die $+x$ -Achse nach dem Frühlingspunkt V (= Richtung der Schnittlinie von Äquatorebene und Erdbahnebene bzw. am Himmel der Punkt, an dem die Sonne am 21. März den Äquator nach Nord überquert), die $+y$ -Achse von Nord aus gesehen um 90° nach links zeigt und die $+z$ -Achse die Rotationsachse der Erde, nach Nord zu, ist.

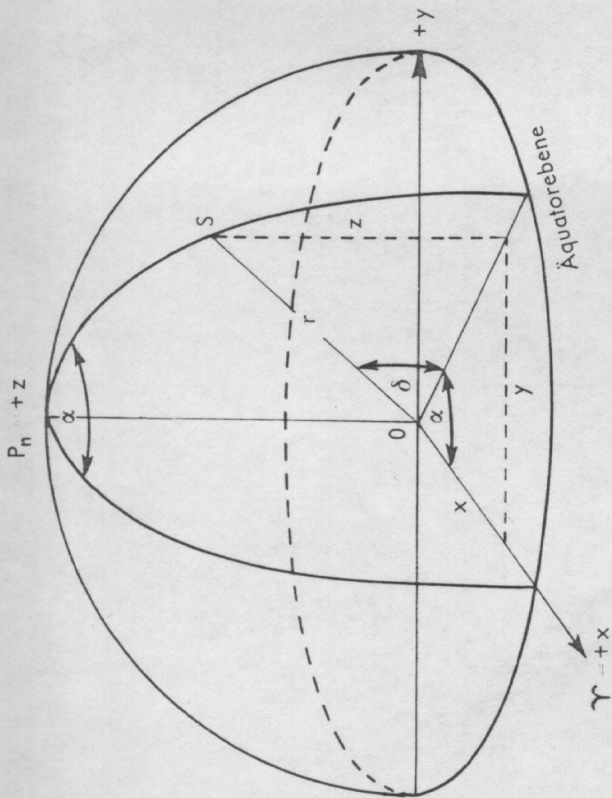


Fig. 3. Polarkoordinaten und rechtwinklige Koordinaten eines Punktes *S* im geozentrischen Äquatorsystem*.

In räumlichen Polarkoordinaten ist *r* der Abstand vom Erdmittelpunkt, α die Rektaszension, der Winkel zwischen den beiden Ebenen durch die Rotationsachse und *Y* bzw. *S* (= Satellit oder irgendein Himmelskörper) und δ die Deklination, der Winkel zwischen *r* und der Äquatorebene (Fig. 3).

Es gelten dann die Umrechnungsformeln:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \delta \cos \alpha \\ y &= r \cos \delta \sin \alpha \\ z &= r \sin \delta. \end{aligned} \tag{3}$$

Dieses Koordinatensystem ist wegen der Präzession und Nutation der Erdatmosphäre nicht völlig raumfest, doch erfolgen die Verlagerungen zeitlich nur langsam und bleiben hier unberücksichtigt.

Für die Beobachtungen braucht man ein System mit dem Nullpunkt im Beobachtungsort *B*. Denkt man sich das geozentrische Äquatorsystem

* *S* ist hier und in einigen späteren Figuren der Einfachheit halber sowohl als Raumpunkt wie auch als Punkt an der Sphäre gezeichnet. Als Punkt an der Sphäre ist er natürlich nur durch seine Richtung von 0 aus, also durch Winkelkoordinaten, nicht durch *r* oder *x*, *y*, *z* definiert.

parallel verschoben, so daß der Nullpunkt nach *B* fällt, dann hat man das topozentrische Äquatorsystem ξ, η, ζ bzw. $\Delta, \alpha_t, \delta_t$. Zur Umrechnung vom einen in das andere System benötigt man die geozentrischen Koordinaten x_0, y_0, z_0 von *B*. In Polarkoordinaten hat man zunächst ϱ sowie $\delta_0 = \beta$ aus den Formeln (1) und (2). Im Folgenden wird stets β statt δ ge-

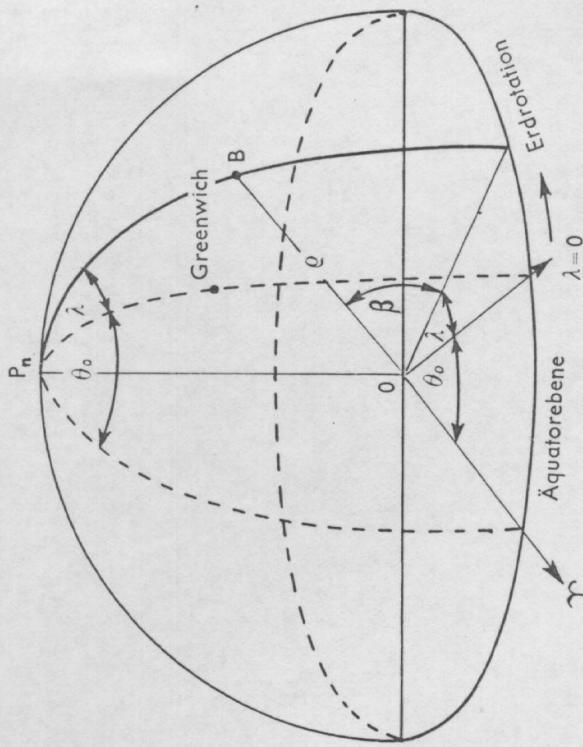


Fig. 4. Polarkoordinaten eines Punktes *B* der Erdoberfläche im geozentrischen Äquatorsystem.

schrieben, wenn es sich um Punkte handelt, die in irgendeiner Verbindung mit der Erde stehen. Für α_0 gilt: $\alpha_0 = \Theta_0 + \lambda$, wobei Θ_0 der Winkel zwischen den Meridianebenen durch *V* und Greenwich ist und λ die geogr. Länge von *B*, die hier stets nach Osten positiv gerechnet wird. Das ist zweckmäßig, da praktisch alle Satelliten die Erde in Richtung West-Ost umkreisen. Der Winkel Θ_0 heißt Sternzeit Greenwich für den Zeitpunkt der Beobachtung; er ist prop. zur Zeit, die seit dem Durchgang des *V* durch den Meridian von Greenwich verstrichen ist und kann aus astronomischen Jahrbüchern entnommen werden (siehe I.3). Statt α_0 schreiben wir Θ ($= \Theta_0 + \lambda$); Θ heißt Ortssternzeit, auch kurze Sternzeit in *B*. Dann ist:

$$\begin{aligned} x_0 &= \varrho \cos \beta \cos \Theta \\ y_0 &= \varrho \cos \beta \sin \Theta \\ z_0 &= \varrho \sin \beta \end{aligned} \tag{4}$$

gegen V proportional zur Zeit ändert. Es ist 0^h WZ, wenn die mittlere Sonne in Greenwich in unterer Kulmination ist (auf der Nordseite des Meridians von Greenwich steht)*. Die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Meridiandurchgängen ist ein mittlerer Tag, der in bekannter Weise unterteilt wird und so die Einheiten zur Messung von Zeitintervallen in mittlerer Zeit liefert. So bedeutet die Angabe 16^h WZ, daß seit der unteren Kulmination der mittleren Sonne in Greenwich 16^h mittlere Zeit vergangen sind.

Sternzeit richtet sich nach dem V : es ist $\Theta = 0$ in Greenwich, wenn der V in Greenwich im Meridian (im Süden!) steht. Die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Meridiandurchgängen ist ein Sterntag, der ebenfalls, wie der mittlere Tag, in Stunden, Minuten und Sekunden unterteilt wird. Seine Dauer ist fast genau gleich der Rotationsperiode der Erde. Da sich die mittlere Sonne täglich um nahe 1° , genauer um $360^\circ/365,2422$ gegenüber dem V in Richtung der Erddrehung bewegt, ist der mittlere Tag länger als der Sterntag, und zwar um $3^m 55^s.91$ mittl. Zeit, eben gerade um die Zeit, die die Erde bei ihrer Rotation braucht, um die Sonne wieder „einzuholen“. Das genaue Verhältnis ist: 1 mittlerer Tag = $366,2422/365,2422 = 1,00274$ Sterntage.

Um die WZ eines bestimmten Zeitpunktes in die Sternzeit des Beobachtungsortes umzurechnen, muß man zunächst einem astronomischen Jahrbuch die für 0^h WZ eines jeden Tages tabulierte Sternzeit Greenwich entnehmen. Diese sei Θ_0 . Seit 0^h WZ sei die Zeit T , ausgedrückt in mittl. Zeit, verflossen – das ist gerade die in Stunden, Minuten usw. oder auch in Tagesbruchteilen angegebene WZ für diesen Zeitpunkt. In diesem Zeitintervall hat aber die Sternzeit nicht um T , sondern um $1,00274 T$ zugenommen. Diesen Betrag entnimmt man Tabellen mit T als Argument und hat dann in der Summe $\Theta_0 + 1,00274 T$ die Sternzeit Greenwich. Die Sternzeit an einem Ort der geogr. Länge λ ist nun: $\Theta_\lambda = \Theta_0 + \lambda$. Beispiel: Es soll die Sternzeit für einen Ort der geogr. Länge $\lambda = 100^\circ 0' 0''$ West = $260^\circ 0' 0''$ Ost = $17^h 20^m 0^s$ Ost für 1961 Okt. 1, $10^h 0^m 0^s$ WZ berechnet werden.

Aus dem „Nautical Almanac“ entnimmt man für diesen Tag:

Sternzeit Greenwich für 0^h Weltzeit: $\Theta_0 = 0^h 37^m 56^s.5$

Zeitintervall in mittlerer Zeit: $T = 10^h 0^m 0^s$

$0,00274 \cdot T$ (aus Tabellen): $= 1^m 38^s.6$

Sternzeit Greenwich: $\Theta_0 = 10^h 39^m 35^s.1$

Länge: $\lambda = 17^h 20^m 0^s$

Ortssternzeit: $\Theta_\lambda = 3^h 59^m 35^s.1$

* Diese Definition gilt nicht mehr streng; siehe Literaturverzeichnis „Meyers Handbuch über das Weltall“, 2. Aufl., 1961, S. 80.

Häufig benutzt man als Datumsangabe das sog. „Julianische Datum“ (hat nichts mit dem Julianischen Kalender zu tun!). Dabei werden die Tage fortlaufend gezählt, Jahres- und Monatsangaben entfallen. Das ist besonders bei Rechnung mit Zeitintervallen sehr praktisch. Zeitangaben bei Bahnrechnungen künstlicher Satelliten werden nach dem „Modifizierten Julianischen Datum“ (MJD) gemacht. Danach wird z. B. dem Zeitpunkt 1960 Jan. 1, 0^h WZ die Zahl 2436934.0 zugeordnet, dem Zeitpunkt 1962 Febr. 1, 12^h WZ die Zahl 2437696.5.

4. Die Atmosphäre

Für die Abbremsung eines Satelliten durch den Luftwiderstand kommen nur die Atmosphärenschichten oberhalb 100 km in Frage, die sog. Hochatmosphäre, oberhalb etwa 1000 km auch Exosphäre genannt. Über die Zustandsgrößen Druck, Temperatur, Dichte und Molekulargewicht in diesen Höhen wissen wir erst durch Raketenanstiege und besonders durch die Umlaufzeitänderungen bei künstlichen Satelliten einigermaßen Bescheid. Die Verhältnisse in der Hochatmosphäre unterscheiden sich wesentlich von denen in den tieferen Schichten. Abgesehen davon, daß natürlich Druck und Dichte sehr klein sind, ist die Dichte in einer bestimmten Höhe starken zeitlichen Schwankungen in Abhängigkeit von der Tageszeit (Sonnenstand) und der Sonnenaktivität (Auftreten von Sonnenflecken, Schwankungen der von der Sonne ausgehenden Wellen- und Korpuskularstrahlung) unterworfen. Die Temperatur steigt mit wachsender Höhe an, die Zusammensetzung ändert sich, indem die Moleküle unter dem Einfluß der UV-Strahlung der Sonne dissoziieren, d. h. in Atome gespalten werden, und auch der Anteil an leichteren Gasen nach oben ansteigt. Während am Boden N_2 und O_2 vorherrschen, überwiegt ab etwa 400 km atomares N und O und oberhalb 1000 km (zeitlich variabel) bilden He und schließlich atomares H die Hauptanteile. Die Folge ist eine stetige Abnahme des mittleren Molekulargewichts. In welcher Höhe die Dichte der Atmosphäre gleich der des interplanetaren Mediums wird, wo also ihre obere Grenze anzusetzen ist (die zeitlich ebenfalls variieren wird), ist noch ungewiß. Die ionisierende Wirkung der Sonnenstrahlung hat auch zur Folge, daß die Hochatmosphäre in wechselndem Anteil Ionen und freie Elektronen enthält, was nicht ohne Einfluß auf den Luftwiderstand ist.

Für die Theorie der Bahnstörungen infolge des Luftwiderstandes braucht man einen mathematischen Ausdruck für die Abhängigkeit der Dichte von der Höhe. Jedenfalls gilt stets die Gasgleichung $p = \frac{\mathfrak{R}}{m} \rho T$ (p =

Druck, ρ = Dichte, T = absolute Temperatur, \mathfrak{R} = absolute Gaskonstante,

m = Molekulargewicht). Nimmt man die Bedingung des hydrostatischen Gleichgewichts hinzu: $dp = -g \rho dH$ (g = Schwerebeschleunigung, H = Höhe), die besagt, daß die Druckabnahme längs des Höhenintervalls dH gleich ist dem Gewicht der über einem cm^2 liegenden Luftmasse zwischen H und $H + dH$, dann gewinnt man nach Elimination von ρ und Integration die Formel für die Druckabnahme zwischen dem unteren Niveau H_0 und H^* :

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{H}{H_0} \int_{H_0}^H \frac{m g}{T} dH}$$

Wären in diesem Höhenintervall m, g und T konstant, dann könnte man

schreiben: $p = p_0 \cdot e^{-\frac{H-H_0}{H} \frac{R}{m g} T}$, wobei $H = \frac{R}{m g} T$ gesetzt ist.

Die Größe H , die sog. Skalen- oder Maßstabhöhe, gäbe dann den Höhenbereich an, innerhalb dessen der Druck auf den e ten Teil fällt. Unter den gleichen Voraussetzungen kann man auch für den Dichteverlauf schreiben:

$$(7) \quad \rho = \rho_0 \frac{T_0}{T} \cdot e^{-\frac{1}{R} \int_{H_0}^H \frac{m g}{T} dH} = \rho_0 \cdot e^{-\frac{H-H_0}{H}}$$

Da T nach oben zu-, m und g aber abnehmen, nimmt H nach oben zu. Bei der Berechnung des Einflusses des Luftwiderstands auf Satellitenbahnen macht man trotzdem meist den Ansatz (7) mit $H = \text{const}$, wobei der Wert von H für den tiefsten Bahnpunkt (Perigäumshöhe) einzusetzen ist, da die Abbremsung hier am größten ist. H kann als Funktion von H aus $H = -\frac{dH}{d \ln \rho}$ berechnet werden, wenn $\rho = \rho(H)$ aus Beobachtungen von Satelliten mit verschiedenen Perigäumshöhen bestimmt wurde. Dieses H heißt dann Dichte-Skalenhöhe (unter Skalenhöhe versteht man

i. a. die „Druck-Skalenhöhe“ $-\frac{dH}{d \ln \rho}$). Wegen der zeitlichen Variation von ρ ist auch H zeitlich nicht konstant. Tabelle 1 gibt unter Maximum bzw. Minimum die ungefähren Extremwerte der Zustandsgrößen von 150 km bis 1600 km Höhe (nach H. K. Paetzold). Die Zahlenangaben werden nach oben immer unsicherer. Wegen weiterer Einzelheiten siehe 6.5. H_g ist die Dichte-Skalenhöhe.

* Da in der Hochatmosphäre das Mischungsverhältnis der atmosphärischen Gase mit der Höhe variiert, gilt diese Gleichung streng nur für den Partialdruck jeder einzelnen Komponente.

Tabelle 1
Zustandsgrößen in der Hochatmosphäre zu Zeiten maximaler und minimaler Dichte (nach H. K. Paetzold)

H km	Maximum			Minimum		
	ρ gr/cm ³	$\log \rho$	H_g km	$\log \rho$	H_g km	T °K
150	3.40 · 10 ⁻¹²	-11.47	12	28.0	2.92 · 10 ⁻¹²	-11.54
160	1.53	-11.82	15	98.0	1.21	-11.92
170	8.75	-12.06	20	129.0	6.59	-12.18
180	5.80	-12.24	27	156.0	4.02	-12.39
190	4.40	-12.36	50	164.0	2.64	-12.58
200	3.95	-12.40	65	166.0	1.94	-12.71
220	2.78	-12.56	50	146.0	26.5	-13.02
240	1.74	-12.76	38	174.0	25.3	-13.26
260	1.05	-12.98	41	173.0	3.04	-13.52
280	7.06	-13.15	57	183.0	24.7	-13.76
300	5.17	-13.29	67	190.0	1.08	-13.97
350	2.44	-13.61	68	203.0	3.45	-14.46
400	1.21	-13.92	76	212.0	1.14	-14.94
450	6.70	-14.17	91	211.0	19.0	-15.38
500	3.99	-14.40	100	211.0	17.8	-15.77
550	2.50	-14.60	110	213.0	7.32	-16.13
600	1.62	-14.79	120	213.0	16.3	-16.51
700	7.42	-15.13	135	212.0	15.9	-17.11
800	3.61	-15.44	145	211.0	15.7	-17.67
900	1.84	-15.73	153	211.0	15.6	-18.17
1000	9.70	-16.01	157	212.0	2.23	-18.65
1100	5.21	-16.28	162	212.0	7.92	-19.10
1200	2.80	-16.55	168	212.0	3.11	-19.51
1300	1.58	-16.80	173	212.0	1.44	-19.84
1400	8.96	-17.05	179	212.0	7.95	-20.10
1500	5.18	-17.29	185	212.0	4.27	-20.37
1600	3.04	-17.52	190	212.0	2.25	-20.65

Die Unstetigkeit im Verlauf von H_g und T zwischen $H = 200$ und 300 km liegt im Bereich der ionosphärischen F -Schicht. Siehe auch Fig. 55

nung wird sie in diesem Kapitel zunächst elementar, in Kap. III theoretisch behandelt.

2. Bahnelemente; Umlaufzeit und mittlere Entfernung

Unter der Annahme, daß die Gravitation der Erde als Massenpunkt die einzige auf den Satelliten wirkende Kraft ist, erfolgt dessen Bewegung in einer raumfesten Ebene durch den Erdmittelpunkt. Die Lage dieser Bahnebene wird gegenüber der Äquatorebene festgelegt durch zwei Angaben: Neigung i und Rektaszension Ω der Schnittlinie oder Knotenlinie Ω der beiden Ebenen, wobei $\Omega =$ aufsteigender Knoten in die Richtung

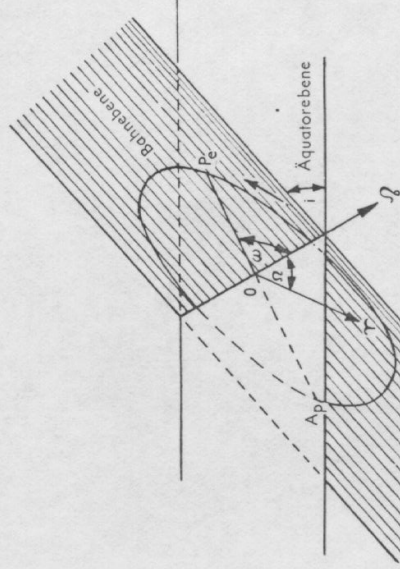


Fig. 6. Festlegung der Bahnebene und Bahnellipse eines Satelliten gegenüber der Äquatorebene und dem Frühlingspunkt.

zeigt, in der der Satellit den Äquator von Süd nach Nord überquert (Fig. 6). Die Bahnellipse wird charakterisiert durch Angabe der Länge der großen Halbachse a , entweder in km oder in Einheiten des Äquatorradius R der Erde, und der Exzentrizität e . Die Lage der Ellipse in der Bahnebene wird festgelegt durch den Winkel ω zwischen der Richtung Ω und der Richtung nach dem Perigäum P_e (erdnächster Punkt) der Ellipse, dem sog. Argument des Perigäums (Fig. 7). Neben diesen 5 Bahnelementen braucht man zur definitiven Festlegung der Bewegung noch eine Angabe, die den Ort des Satelliten zu einem bestimmten Zeitpunkt (Epoche) gibt, etwa die Zeit eines Perigäum- oder Knoten-Durchgangs oder die mittlere Anomalie (siehe 2.3) für eine Ausgangsepoche t_0 .

KAPITEL II
SATELLITENBAHNEN UND KEPLERSCHE
BEWEGUNG IN DER ELLIPSE

1. Allgemeines über Satelliten und Satellitenbahnen

Nach dem geglückten Abschluß eines Satelliten erhält dieser neben einer Typenbezeichnung wie Sputnik I, II, ..., Vanguard I..., Explorer..., Discoverer..., Kurier... usw., die ihm von der für den Abschluß verantwortlichen Stelle gegeben wird nach internationalem Brauch eine Bezeichnung, die aus der Jahreszahl des Abschusses und einem durch die zeitliche Reihenfolge bestimmten kleinen Buchstaben des griechischen Alphabets besteht. Sind bei einem Abschluß mehrere Körper in eine Bahn gebracht worden – neben dem eigentlichen Satelliten etwa dessen letzte, evtl. auch vorletzte Raketenstufe –, dann wird noch eine Zahl in der Reihenfolge der Helligkeit der einzelnen Objekte angehängt. So ist z. B. 1958 δ_1 die letzte Raketenstufe von Sputnik III, 1958 δ_2 der eigentliche Satellit Sputnik III. Der Buchstabe δ zeigt an, daß dies der 4. geglückte Start des Jahres 1958 war. Der Ballon-Satellit Echo I hat die Bezeichnung 1960 ϵ_1 , seine letzte Raketenstufe 1960 ϵ_2 . Bei mehr als 24 geglückten Starts pro Jahr wird mit α, β, \dots weiter nummeriert.

Der Abschluß erfolgt fast immer in östlicher Richtung, da sich dadurch eine Geschwindigkeitskomponente der Erdrotation zu der durch den Raketenantrieb bewirkten Geschwindigkeit addiert. Ein kleiner Vorteil ist dabei auch, daß die Atmosphäre mit der Erde in gleicher Richtung rotiert, der Satellit also „Rückenwind“ hat.

Wie schon in der Einleitung gesagt, kann man die Bahn eines Satelliten in Näherung immer als eine Ellipse betrachten, die allerdings durch störende Einflüsse verändert wird. Sie wäre genau eine Ellipse und würde sich auch mit der Zeit nicht ändern, wenn die einzige Kraft die Anziehung einer kugelförmigen Erde mit zentralsymmetrischer Dichteverteilung im Innern wäre – die Erde könnte dann als Massenpunkt behandelt werden. Die Bewegung würde nach den bekannten Keplerschen Gesetzen erfolgen mit dem Erdmittelpunkt als Brennpunkt der Bahnellipse. Wegen der großen Bedeutung dieser „Keplerschen Bewegung“ für die Bahnrech-

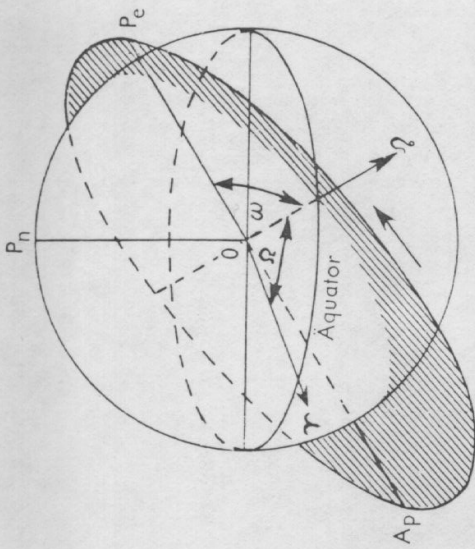


Fig. 7. Erde und Satellitenbahn.

Die Umlaufzeit U ist kein unabhängiges Bahnelement, da sie auf Grund des 3. Keplerschen Gesetzes mit der großen Halbachse a korreliert ist: es ist $U^2 \text{ prop. } a^3$ (wegen der theoretischen Ableitung dieses und anderer Gesetze der elliptischen Bewegung siehe Kap. III). Die Proportionalitätskonstante kann durch Betrachtung des Spezialfalls einer Kreisbahn elementar abgeleitet werden. Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz ist die Gravitationsbeschleunigung im Abstand $r = a$ vom Erdmittelpunkt $\frac{GM}{a^2}$, wobei $G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{sec}^2 \cdot \text{gr}$ die Gravitationskonstante und M die Erdmasse ist. Andererseits ist die Zentrifugalbeschleunigung auf einer Kreisbahn $\left(\frac{2\pi}{U}\right)^2 a$, wobei $\frac{2\pi}{U}$ die Winkelgeschwindigkeit ist.

Da auf einer Kreisbahn beide gleich sein müssen, so gilt:

$$(8) \quad U^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3.$$

Die Konstante im 3. Keplerschen Gesetz ist also $\frac{4\pi^2}{GM}$. Setzt man

$\frac{2\pi}{U} = n$, wobei n die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Satelliten ist (pro Tag oder, bei Satelliten zweckmässig, pro Minute, da auch U häufig in Minuten angegeben wird), so gilt auch:

$$(9) \quad n^2 a^3 = GM.$$

Schließlich hat man noch für die Geschwindigkeit auf der Kreisbahn und zugleich mittlere Geschwindigkeit in der Ellipse:

$$(10) \quad V_K = n a = \sqrt{\frac{GM}{a}} \quad \text{oder} \quad V_K \sqrt{a} = \sqrt{GM}.$$

Mit dem Zahlenwert $GM = 3,986 \cdot 10^{20} \text{ cm}^3/\text{sec}^2 = 398\,600 \text{ km}^3/\text{sec}^2$ lauten diese Beziehungen:

$$(11) \quad U = 1,6587 \cdot 10^{-4} a^2 = 84,491 \left(\frac{a}{R}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$(12) \quad V_K = \frac{631,35}{\sqrt{a}} = 7,905 \sqrt{\frac{a}{R}},$$

U in Minuten, a in km, V in km/sec.

Tabelle 2 gibt mit dem Argument a bzw. a/R die mittlere Höhe \bar{H} (Mittel aus größter und kleinster Höhe) über einer kugelförmigen Erde mit dem mittleren Radius 6371 km, die Umlaufzeit in Min., die mittlere Bewegung n in Grad/Min. und die Kreisbahngeschwindigkeit in km/sec.

Tabelle 2

Umlaufzeit, mittlere Winkelgeschwindigkeit und mittlere Geschwindigkeit (Kreisbahngeschwindigkeit) als Funktion der großen Halbachse bzw. der mittleren Höhe über der Erdoberfläche.

a km	a R	\bar{H} km	U Min.	n Grad/Min.	V_k km/sec
6 378	1.0000	7	84.49	4.261	7.91
6 400	1.0034	29	84.92	4.239	7.89
6 500	1.0191	129	86.92	4.142	7.83
6 600	.0348	229	88.94	4.048	7.77
6 700	.0505	329	90.97	3.958	7.71
6 800	.0661	429	93.01	3.871	7.66
6 900	.0818	529	95.07	3.787	7.60
7 000	.0975	629	97.14	3.706	7.55
7 200	.1288	829	101.34	3.552	7.44
7 400	.1602	1 029	105.58	3.410	7.34
7 600	.1916	1 229	109.89	3.276	7.24
7 800	.2229	1 429	114.26	3.151	7.15
8 000	.2542	1 629	118.69	3.033	7.06
9 000	.4111	2 629	141.62	2.542	6.65
10 000	1.5678	3 629	165.64	2.174	6.31
15 000	2.3518	8 630	5 ^h 4 ^m 43 ^s	1.1814	5.15
20 000	3.1357	13 630	7 49 8	0.7674	4.47
42 160	6.611	35 790	23 56 4	0.2507	3.07
384 400	60.266	—	27 ^d 7 ^h 43 ^m	0.00915	1.02

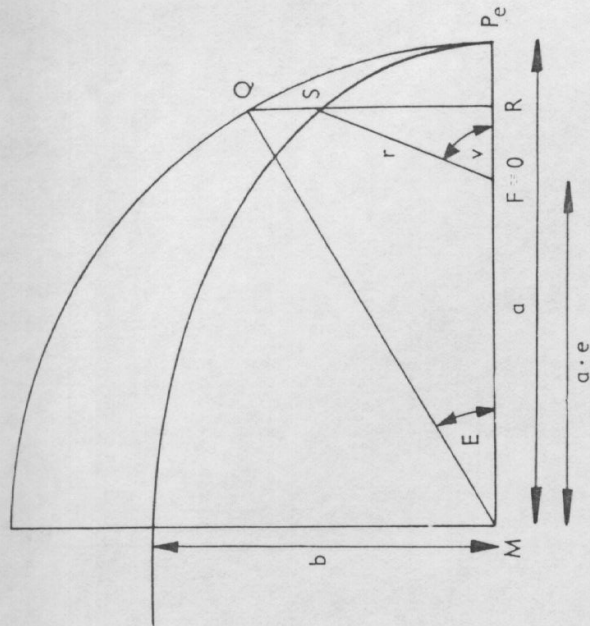


Fig. 9. Zur Ableitung der Gleichungen der Keplerschen Bewegung in der Ellipse.

und wahre Anomalie, als Funktion von $(t-T)$ zu berechnen aus der Bedingung, daß die Ellipsenfläche $\overline{FP_eS}$ (Fig. 9) proportional zu $(t-T)$ sein soll ($F = \text{Erdmittelpunkt}$). Es ist nicht möglich, diese Bedingung durch einen geschlossenen mathematischen Ausdruck etwa der Form $v = f(t-T)$ auszudrücken. Die Lösung gelingt nur über den Hilfswinkel E , die sog. exzentrische Anomalie. Verlängert man das Lot von S auf a bis zum Schnitt mit dem großen Scheitelkreis der Ellipse in Q , dann kann man die Fläche $\overline{FP_eS}$ als Funktion von a und E darstellen:

$$\begin{aligned} \overline{FP_eS} &= \overline{FRS} + \overline{RP_eS} = \frac{1}{2} \overline{FR} \cdot \overline{RS} + \frac{b}{a} \cdot \overline{RP_eQ} = \\ &= \frac{1}{2} \overline{FR} \cdot \overline{RS} + \frac{b}{a} (\overline{MP_eQ} - \overline{MRQ}). \end{aligned}$$

Nun ist: $\overline{FR} = r \cos v = a \cos E - a e$

$$\overline{RS} = r \sin v = b \sin E$$

$$\overline{MP_eQ} = \frac{E}{2} a^2$$

$$\overline{MRQ} = \frac{1}{2} a^2 \sin E \cos E.$$

26 11. Satellitenbahnen und Keplersche Bewegung in der Ellipse

Die vorletzte Spalte bezieht sich auf die sog. 24h.-Bahn, bei der U gleich der Rotationsdauer der Erde, d. h. gleich einem Sterntag ist, so daß ein Satellit in diesem Abstand, falls er in der Äquatorebene umläuft ($i = 0$), über dem gleichen Erdort stehen bliebe (er würde allerdings starken Störungen durch Sonne und Mond unterliegen). Die letzte Zeile bezieht sich auf den Mond; für ihn gilt (8) und (11) nicht genau, da die Mondmasse gegenüber der Erdmasse nicht vernachlässigbar ist und daher im Nenner von (8) die Summe beider Massen stehen muß, d. h. 1.0123 M statt M (siehe Fußnote Seite 49).

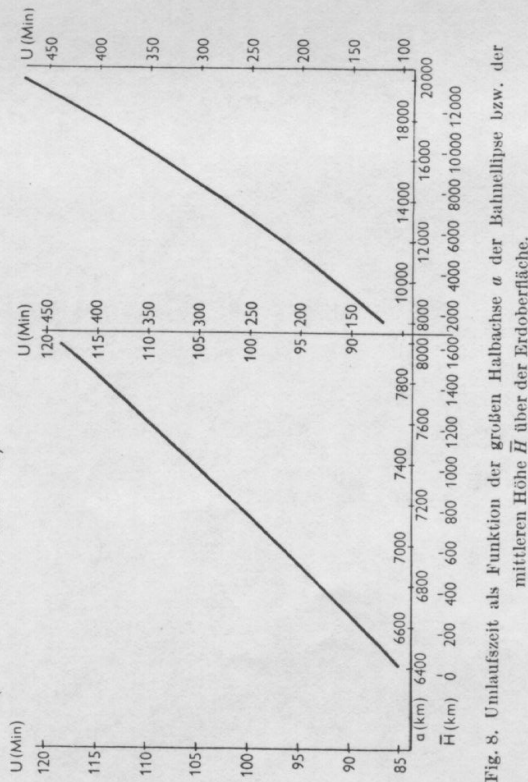


Fig. 8. Umlaufzeit als Funktion der großen Halbachse a der Bahnellipse bzw. der mittleren Höhe H über der Erdoberfläche.

In Fig. 8 ist der Zusammenhang zwischen a bzw. H und der Umlaufzeit U graphisch dargestellt.

Beispiele für Bahnelemente siehe 2.5, 2.7 und 8.5.*

3. Die Bewegung in der Ellipse

Um den Ort des Satelliten aus den vorgegebenen Bahnelementen für einen bestimmten Zeitpunkt zu berechnen, muß man zunächst seinen Ort in der Bahnebene berechnen. Hierzu muß das 2. Keplersche Gesetz, wonach die vom Radiusvektor des Satelliten überstrichene Fläche proportional der Zeit sein soll, verwendet werden. Sei T die Zeit des Perigäumdurchgangs, t die Zeit, zu der der Satellit in S steht, so kommt das Problem darauf hinaus, die Polarkoordinaten r und v , Radiusvektor

* Eine Zusammenstellung der wichtigsten Daten über künstliche Satelliten siehe in der Zeitschrift „Sterne und Weltraum“ 1962, Heft 4 und 1963 Heft 1.

Faßt man alles zusammen, so bleibt: $\overline{FP_eS} = \frac{1}{2} ab (E - e \sin E)$.
 Da die ganze Ellipsenfläche πab ist, so muß also nach dem 2. Keplerschen Gesetz gelten:

$$(13) \quad E - e \sin E = \frac{2\pi}{U} (t - T) = n (t - T) = M,$$

wobei M mittlere Anomalie zur Zeit t genannt wird. Sie ist bei gegebenen Bahnelementen bekannt.

Die transzendente Gleichung (13) zur Bestimmung von E , die sog. Keplersche Gleichung, muß durch Versuche oder durch Reihenentwicklung gelöst werden. Ist E berechnet, dann findet man r und v aus:

$$(14) \quad \begin{aligned} r \cos v &= a (\cos E - e) \\ r \sin v &= a \sqrt{1 - e^2} \sin E. \end{aligned}$$

Daneben gilt noch die Polargleichung der Ellipse

$$(15) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos v},$$

wobei $p = a(1 - e^2)$ der Parameter der Ellipse, d. h. der Radiusvektor für $v = 90^\circ$ ist. Schließlich sei noch die Formel

$$(16) \quad r = a(1 - e \cos E).$$

angemerkt. Die r -Werte für Perigäum bzw. Apogäum sind:

$$(17) \quad \begin{aligned} r_{Pe} &= a(1 - e) \\ r_{Ap} &= a(1 + e). \end{aligned}$$

Legt man nicht auf höchste Genauigkeit Wert, dann kann man zur Berechnung von r und v ohne den Umweg über E entweder die Reihenentwicklungen

$$\begin{aligned} v &= M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \dots, \\ \frac{r}{a} &= 1 - e \cos M - \frac{e^2}{2} (\cos 2M - 1) - \dots \end{aligned}$$

oder Tabellen für $(v - M)$ und $\frac{r}{a}$ mit den Argumenten M und e benutzen, wie sie z. B. 1960 in ausführlicher Form in der UdSSR herausgegeben und 1961 in englischer Übersetzung erschienen sind*. Fig 10

* A Collection of Tables and Nomograms for the Processing of Observations Made on Artificial Earth Satellites. Mathematical Tables; Volume 12 Pergamon Press — Oxford, London, New York, Paris; 1961.

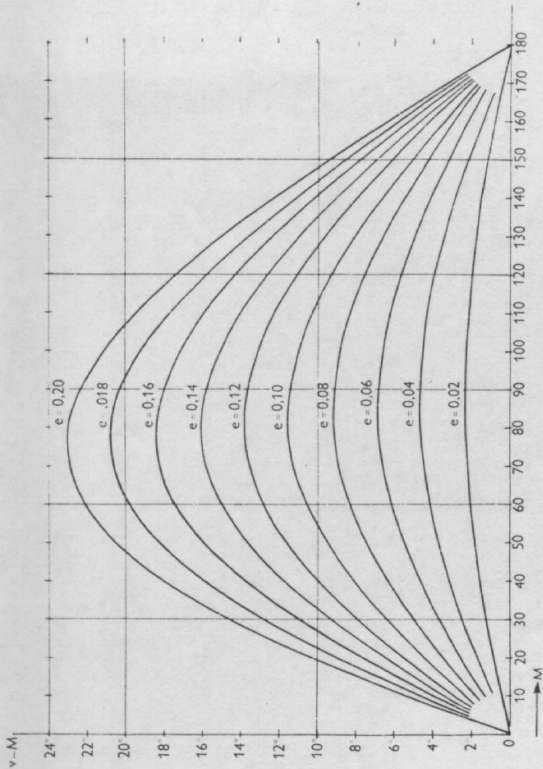


Fig. 10. Differenz „wahre minus mittlere Anomalie“ als Funktion der mittleren Anomalie M und der Exzentrizität e bis $e = 0.20$.

gibt eine graphische Darstellung von $v - M$ bis $e = 0.20$. Für Werte $M > 180^\circ$ muß man $(v - M)$ mit dem Argument $(360^\circ - M)$ ablesen und negativ nehmen.

4. Der Ort im Raum

Um aus r, v die geozentrischen Koordinaten r, α, δ zu berechnen, betrachte man das rechtwinklige sphärische Dreieck, das aus Äquator, Bahnebene und dem Stundenkreis durch S gebildet wird (Fig. 11). $OP_e =$ Richtung zum Perigäum. Nach der Neperschen Regel für rechtwinklige Dreiecke gilt:

$$(18) \quad \begin{aligned} \tan(\alpha - \Omega) &= \tan(\omega + v) \cos i = \tan u \cos i \\ \sin \delta &= \sin(\omega + v) \sin i = \sin u \sin i \\ \tan \delta &= \sin(\alpha - \Omega) \tan i, \end{aligned}$$

wobei $u = \omega + v$ der Winkelabstand des Satelliten vom Ω ist.

Das oben erwähnte Tabellenwerk enthält auch ausführliche Tabellen für $(\alpha - \Omega)$ und δ (allerdings unter der Bezeichnung y und x) als Funktion von i und u .

Der topozentrische Ort, der nun mit der Beobachtung verglichen werden kann oder zur besseren Auffindung am Himmel bzw. zur Ausrichtung

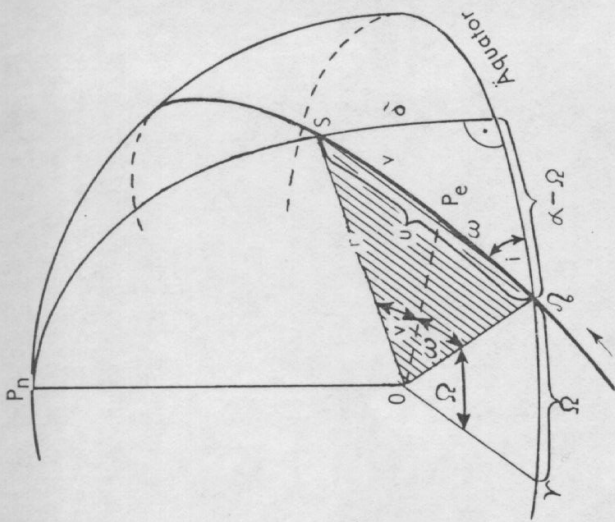


Fig. 11. Zur Berechnung der geozentrischen Äquatorkoordinaten α, δ aus den Koordinaten in der Bahnebene.

einer Antenne zum Zweck der Aufnahme der vom Satelliten ausgesandten Impulse dient, kann nach den Formeln (5) und (6) berechnet werden. Oftmals genügt allerdings auch eine genäherte Rechnung, etwa für das Aufsuchen am Himmel oder das Ausrichten einer Antenne. In diesem Falle benutzt man zweckmäßigerweise die in den beiden folgenden Abschnitten beschriebenen Verfahren, die den Vorteil größerer Anschaulichkeit haben.

5. Die Bahnprojektion auf die Erdoberfläche

Mit den geozentrischen Koordinaten α, δ des Satelliten werden zunächst die geographischen Koordinaten des sog. „Subsatelliten-Punktes“ berechnet, d. h. desjenigen Punktes der Erdoberfläche, der im Zeitpunkt t genau unter dem Satelliten liegt, in dessen Zenit also der Satellit steht. Bei einer kugelförmigen Erde sind diese einfach:

$$(19) \quad \lambda = \alpha - \Theta_0 \quad (\Theta_0 = \text{Sternzeit Greenwich zur Zeit } t) \\ \varphi = \delta.$$

Die erste Gleichung folgt aus der Definition der 3 Größen λ, α und Θ_0 (Fig. 3 und 4).

Bei Berücksichtigung der Erdabplattung ändert sich die Gleichung für λ nicht, die Gleichung für φ wird (in großer Näherung):

$$\varphi = \delta + 11.5 \frac{R}{r} \sin 2\delta \quad (R = \text{Erdradius}).$$

So geht z. B. für den einen Extremfall $r = R$, d. h. für einen Punkt an der Erdoberfläche, diese Gleichung über in (2), für den anderen Extremfall $r = \infty$ ist $\varphi = \delta$, da dann die Richtungen vom Erdmittelpunkt und vom Beobachtungsort aus parallel sind. Bei der Kleinheit des Korrektionsgliedes – maximal 11 Bogenminuten – kann es bei genäherter Rechnung meist vernachlässigt werden.

Denkt man sich alle Subsatelliten-Punkte eines Umlaufs in eine Weltkarte eingetragen und durch eine Kurve verbunden, dann erhält man ein anschauliches Bild vom räumlichen und zeitlichen Verlauf der Bahn über die Erdoberfläche hinweg und relativ zu einem Erdort. Man kann sich das Zustandekommen und die Konstruktion dieser „Projektionskurve“, wie sie hier genannt werden soll, auch wie folgt vorstellen: Denkt man sich die Bahnebene zum Schnitt gebracht mit der kugelförmig angenommenen Erdoberfläche, dann erhält man als Schnittlinie einen größten Kreis, der den Äquator in zwei gegenüberliegenden Punkten schneidet und dessen nördlichster und südlichster Punkt in $\varphi = \pm i$ liegen. Die Erdorte jedoch, die während eines Umlaufs unter der Satellitenbahn liegen, die Subsatelliten-Punkte also, liegen wegen der Erdrotation nicht auf einem größten Kreis. Angenommen, der Satellit überquere den Äquator von Süd nach Nord zur Zeit t_0 über einem Ort der geographischen Länge λ_0 , dann wären ohne Erdrotation die geogr. Koordinaten des Subsatelliten-Punktes zu einer Zeit $t > t_0$ zu berechnen aus

$$\lambda = \lambda_0 + (\alpha - \Omega) \\ \varphi = \delta.$$

Nun hat sich aber die Erde in der Zeit $(t - t_0)$ um den Winkel $0.2507 \cdot (t - t_0)$ gedreht, wenn $(t - t_0)$ in Minuten ausgedrückt wird. Wäre die Rotationsdauer der Erde genau 24h, dann wäre der Faktor 0.2500; da sie aber gleich einem Sterntag, d. h. um 3m 56s kürzer ist als 24h, ist der Faktor etwas größer als 0.25. (siehe 1.3).

Die geogr. Länge des Subsatelliten-Punktes zur Zeit t wird also sein:

$$(19a) \quad \lambda = \lambda_0 + (\alpha - \Omega) - 0.2507 (t - t_0),$$

während die Breite $\varphi = \delta$ bleibt.

Diese Gleichung muß natürlich das gleiche λ liefern wie (19). Daß dies der Fall ist, erkennt man aus folgender Überlegung: im Zeitpunkt t_0 ist $\alpha = \Omega$, $\lambda = \lambda_0$ und also $\Theta_0 = \Omega - \lambda_0$. Zur Zeit t ist dann $\Theta_t = \Omega - \lambda_t + 1.00274(t - t_0)$. Setzt man dies in (19) ein und beachtet, daß der Faktor von $(t - t_0)$ durch 4 zu dividieren ist, um Grade zu erhalten, dann folgt (19a). Man kann nun die Projektionskurve in der Weise zeichnen, daß man für eine Reihe von äquidistanten Werten des Bahnwinkels u nach (18) oder unter Benutzung von Tabellen zunächst α und δ und nach (19) oder (19a) λ und φ berechnet und diese Punkte in eine Karte – am besten eignet sich hierfür eine Weltkarte in Mercator- oder Zylinderprojektion – einträgt. Sie ist gegenüber einer Kurve für nichtrotierende Erde (größter Kreis) in λ -Richtung „zusammengeschoben“, um so mehr, je größer U . Ihr Schnittpunkt mit dem Äquator verlagert sich nach jedem Umlauf um $0.2507 \cdot U$ (U in min) nach Westen. Um dieser Verlagerung von λ_0 einfach Rechnung zu tragen, ist es zweckmäßig, die Kurve auf Transparentpapier zu zeichnen und dies entsprechend dem jeweiligen Wert von λ_0 für einen bestimmten Umlauf auf die Karte zu legen. (Die in 5.4 besprochene Knotendrehung bewirkt zusätzlich eine geringe, fortschreitende Änderung von λ_0).

Die Form der Kurve hängt bei gegebener Kartenprojektion im wesentlichen von i und U ab. Da i während der Lebensdauer eines Satelliten praktisch konstant bleibt und U unter dem Einfluß des Luftwiderstands nur langsam abnimmt, kann man eine einmal gezeichnete Kurve lange benutzen; im Laufe der Zeit kann es notwendig werden, der Änderung von U durch eine neue Kurve Rechnung zu tragen.

Bei der Berechnung von λ nach (19a) tritt allerdings eine Schwierigkeit durch das letzte Glied, das die Erdrotation berücksichtigt, auf. Zu den äquidistant angenommenen Werten von u , nach denen die Kurve gezeichnet wird, gehören je nach der Größe der Exzentrizität e und der Lage des Perigäums, also der Größe von ω verschiedene Werte von $(t - t_0)$, die nach den Formeln der Keplerschen Bewegung zu berechnen wären. Solange e nicht groß ist, und das trifft für die meisten Satelliten zu*, wird die Form der Kurve hierdurch nicht sehr beeinflusst (siehe etwa das Beispiel von Echo I am Ende dieses Abschnitts). Da sich aber ω als Folge der Erdatplattung mehr oder weniger rasch ändert (siehe 5.5), hat es i. a. keinen Sinn, die genaue Projektionskurve für ein bestimmtes e und ω zu zeichnen. Man wird daher einfach eine Kreisbahn

* Es gibt allerdings auch einige stark elliptische Bahnen, wie z. B. die von Explorer XII (1962 v), mit $a = 44800$ km, $U = 26^h 24^m$ und $e = 0.85$. Sein kleinster und größter Abstand von der Erdoberfläche beträgt 264 bzw. 76535 km. Neigung $i = 33^\circ$. Die Projektionskurve für solche U - und e -Werte ist natürlich recht kompliziert!

annehmen und hat dann: $u = n(t - t_0)$. Auf der Kurve erhält man dann Zeitmarken in äquidistanten Abständen, die aber nur für die Kreisbahn gelten. Für eine elliptische Bahn ändert sich, wie schon oben erwähnt, die Kurve selbst wenig, wohl aber die Lage der Zeitmarken, so daß die für $e = 0$ eingezeichneten Marken nur einen mehr oder weniger genauen Anhaltspunkt für den Ort des Satelliten auf der Kurve zu einem bestimmten Zeitpunkt geben.

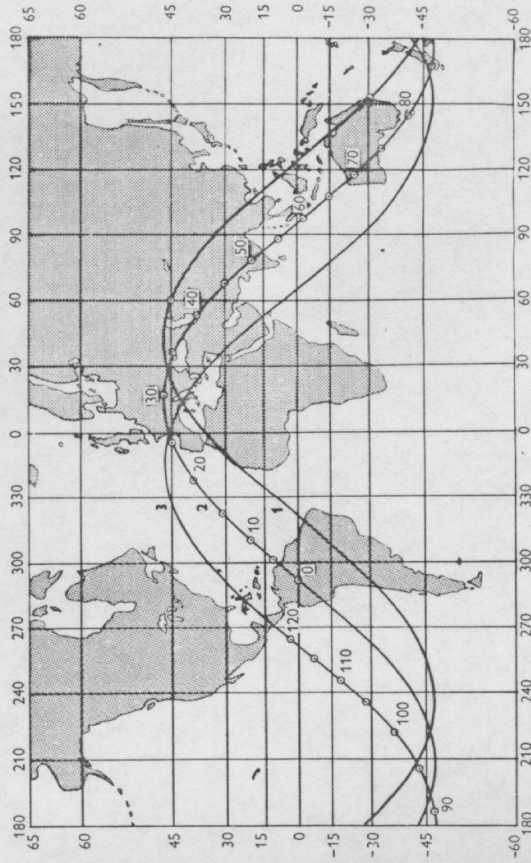


Fig. 12. Drei aufeinanderfolgende Umläufe von Echo I, Aug. 1960. Die Kurven verbinden die Erdorte, die unter der Bahn liegen (Projektionskurven). Kurve 2 enthält Zeitmarken in je 5 Min. Abstand für den Fall einer Kreisbahn (Zylinderprojektion).

Als Beispiel sind in Fig. 12 die Projektionskurven für die drei aufeinanderfolgenden Umläufe Nr. 103, 104 und 105 von Echo I (Start am 12. 8. 1960) während der Nacht vom 20./21. 8. 60 gezeichnet. Die Bahnelemente für $t_0 = \text{Aug. 21.0 WZ}$ waren:

$$\begin{aligned} i &= 47.2^\circ \\ \Omega &= 230.0^\circ \\ \omega &= 29.0^\circ \\ e &= 0.013 \end{aligned}$$

3 Bohrraum, Bahnen künstlicher Satelliten

$$\begin{aligned}
 U &= 118^m 26 \\
 n &= 3^s 044 / \text{min} \\
 M_0 &= 338^s 7.
 \end{aligned}$$

Wegen der Kleinheit von e kann hier genähert mit $e = 0$ gerechnet werden. Dann findet man zunächst die Zeit t_0 für einen dem Zeitpunkt t_0 benachbarten Knotendurchgang aus folgender einfacher Überlegung: zur Zeit t_0 stand der Satellit noch $360^\circ - 338^s 7 = 21^s 3$ vor dem Perigäum (wegen $e = 0$ ist ja $v = M$). Dieses lag um $\omega = 29^s 0$ nördlich des Äquators (in der Bahn gemessen), d. h. zur Zeit t_0 war $u = 7^s 7$. Um diesen Winkel zurückzulegen, braucht der Satellit ($e = 0$) $7.7/n = 2.5$ Min. Es war also $t_0 = 23^h 57^m 5$. Das war die Zeit für den Umlauf Nr. 105. Die Sternzeit Greenwich, aus dem „Nautical Almanac“ entnommen, war für diesen Zeitpunkt

$$\mathcal{O}_0 = 21^h 54^m 7 = 328^s 7$$

und also: $\lambda_0 = \Omega - \mathcal{O}_0 = -98^s 7$ Ost = $98^s 7$ West

Kurve 3 in Fig. 12 ist die Projektionskurve für diesen Umlauf. Für die beiden vorangehenden Umläufe ist die Kurve genau gleich, nur in λ um jeweils $0^s 2507 \cdot 118.26 = 29^s 6$ nach Ost verschoben. Auf der mittleren Bahn sind Zeitmarken im Intervall von je 5 min nach t_0 eingetragen. Als Beispiel seien die Koordinaten für den Punkt $t - t_0 = 30$ m gerechnet:

$$u = n(t - t_0) = 91^s 3$$

$$\alpha - \Omega = 91^s 9 \text{ [aus (18) oder Tabellen]}$$

$$0.25(t - t_0) = 7^s 5$$

$$\lambda - \lambda_0 = 84^s 4$$

$$\lambda_0 = -69^s 1$$

$$\lambda = 15^s 3 \text{ Ost}$$

$$\varphi = \delta = +47^s 2 \text{ [aus (18) oder Tabellen]}$$

Fig. 13 zeigt noch am Beispiel dieser 3 Umläufe von Echo I, wie die Bahn für einen Beobachter in Heidelberg ($\lambda = 8^s 6$ Ost, $\varphi = +49^s 4$) jeweils am Himmel verläuft. Wegen der Berechnung einer solchen topozentrischen Bahn siehe die beiden folgenden Abschnitte 2.6 und 2.7. Man muß sich bei Fig. 13 vorstellen, das Himmelsgewölbe werde von außen, aus der Zenitrichtung (von „oben“) betrachtet. Das Zenit ist daher Mittelpunkt, der Horizont Umkreis. Eingezeichnet sind die Kreise gleicher Höhe h über dem Horizont und die radial verlaufenden Linien gleichen Azimuts, jeweils in Abständen von 15° . Der Durchgang 103 verläuft im wesentlichen am süd-östl. Himmel, 104 verläuft fast sym-

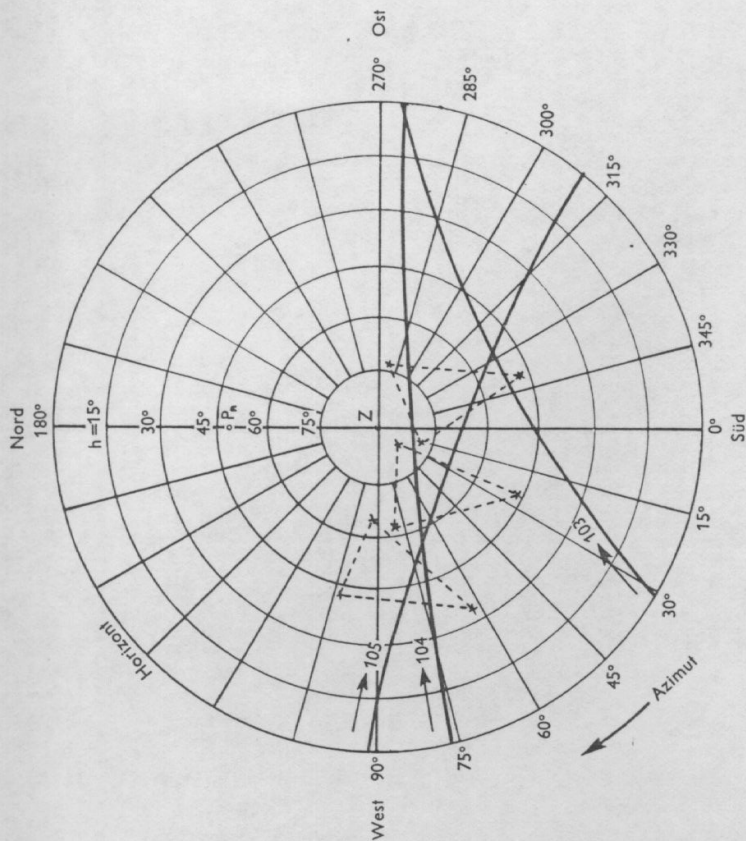


Fig. 13. Der scheinbare Verlauf der Bahn von Echo I für die 3 Umläufe von Fig. 12 beim Durchgang über Heidelberg. Zum Vergleich die jeweilige Stellung der 3 hellen Sterne Wega, Deneb und Atair. (Mittabstandstreuer Azimutalentwurf.)

metrisch zum Meridian von West nach Ost in nur 9° Abstand südlich des Zenits und 105 von West nach Süd-Ost.

In der Fig. sind außerdem eingetragen der nördliche Himmelspol P_n ($h = \varphi = 49^s 4$) sowie dreimal die Stellung der 3 hellen Sterne des sog. Sommerdreiecks: links oben jeweils Wega (α Lyrae), rechts oben Deneb (α Cygni) und unten Atair (α Aquilae). Die drei verschiedenen Lagen entsprechen den Zeiten, da der Satellit jeweils dem Zenit am nächsten war, also etwa der Mitte seiner Sichtbarkeit über dem Horizont. Daß der Satellit stets südlich des Zenits vorübergeht, liegt daran, daß i um $2^s 2$ kleiner ist als φ . Vom Erdmittelpunkt aus gesehen würde die Bahn 104 ziemlich genau $2^s 2$ südlich des Zenits von Heidelberg verlaufen. Wegen der endlichen Entfernung des Satelliten muß dieser

Zenitabstand vom Beobachtungsort aus größer sein; man kann auch sagen: beim Übergang vom Erdmittelpunkt zum Beobachtungsort tritt eine parallaktische Verschiebung ein. Überhaupt würden, vom Erdmittelpunkt aus betrachtet, alle drei Bahnen am Himmel gegenüber den Sternen gleich verlaufen, und zwar noch

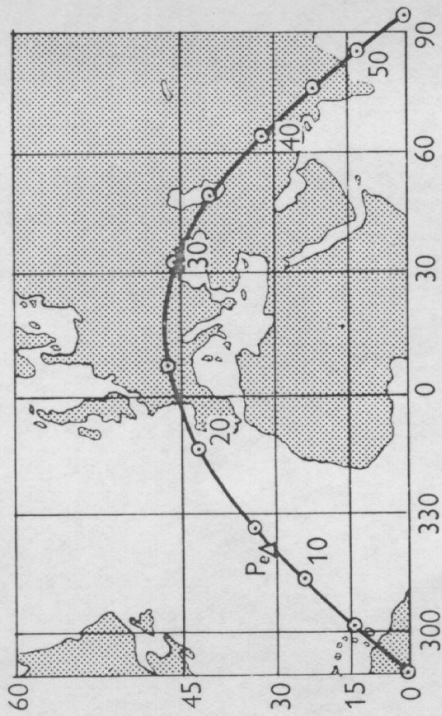


Fig. 14. Nördlicher Teil von Bahn 2 in Fig. 12 mit Zeitmarken für den (angenommenen) Fall einer Exzentrizität von 0.06 und der Lage des Perigäums zwischen Äquator und nördlichstem Bahnpunkt.

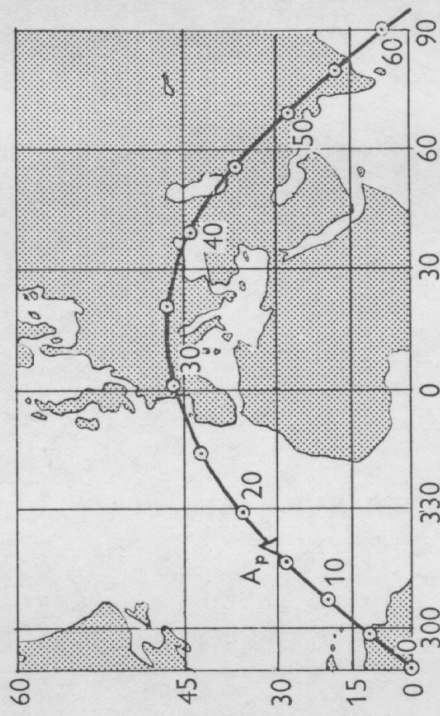


Fig. 15. Wie Fig. 14, aber unter der Annahme, daß das Apogäum zwischen Äquator und nördlichstem Bahnpunkt liegt.

nördlich vom nördlichsten der drei Sterne, Deneb, für den $\delta = 45:1$ ist. Wegen der durch die Erdabplattung verursachten Drehung der Bahnebene (Ω nimmt täglich um $3:1$ ab) ändert sich allerdings der Verlauf der Bahn am Himmel gegenüber den Sternen, auch vom Erdmittelpunkt aus gesehen, langsam aber stetig.

Um den Einfluß eines $e \neq 0$ zu demonstrieren, ist in Fig. 14 und 15 Kurve 2 nochmals unter der Annahme $e = 0.06$ (dieses e hatte Echo I Mitte Nov. 1960) und $\omega = 45^\circ$ bzw. 225° gezeichnet. Im ersten Fall durchläuft der Satellit auf dem Bahnteil zwischen Äquator und nördlichsten Punkt das Perigäum, im andern Fall das Apogäum. Die Kurven unterscheiden sich in ihrer Lage nur wenig - im ersten Fall liegt z. B. der nördlichste Punkt der Kurve in Länge um $0:7$ nach Ost, im zweiten um $0:9$ nach West gegenüber der Kreisbahn, d. h. um Beträge, die im Maßstab der Zeichnung nicht erkennbar sind; dagegen liegen die Zeitmarken sehr verschieden. Im ersten Fall steht der Satellit 30^m nach t_0 bereits bei Odessa, an der Nordküste des Schwarzen Meeres, im zweiten erst über Mitteleuropa. Andererseits erkennt man daraus, daß es möglich sein muß, aus einer Anzahl genauer Beobachtungen längs der Bahn gute Bahnelemente zu bestimmen.

Der Leser möge selbst überlegen, wie die Projektionskurve für einen Satelliten mit $U = 24^h$ (genauer ein Sterntag) und $i = 45^\circ$ aussieht ($e = 0$ angenommen), ebenso für den Fall einer Polbahn mit $i = 90^\circ$ und $U = 2^h$ bzw. $U = 24^h$ oder allgemein für Bahnen mit $U > 24^h$.

6. Genäherte Berechnung von Azimut und Höhe*

Die etwas umständlichen Gleichungen (5) und (6) zur Berechnung des topozentrischen Ortes kann man für genäherte Rechnung umgehen. Falls diese Rechnungen für einen bestimmten Beobachtungsort B häufig auszuführen sind, ist es zweckmäßig, auf einer geeigneten Karte Kurven gleicher Entfernung auf der Erdoberfläche und gleichen Azimuts von B aus einzuzichnen. Die Entfernung kann dabei in Winkelmaß oder in km angegeben werden. Nimmt man die Erde als Kugel mit einem mittleren Radius $R = 6371$ km an, dann entspricht einem Winkelabstand von $\sigma = 1^\circ$ auf dem Großkreis eine Distanz von $s = 111.22$ km. Die Kurven sind punktweise zu konstruieren nach den Formeln:

$$\begin{aligned} \cotg(\lambda - \lambda_0) &= -\cos \varphi_0 \cotg \sigma \operatorname{cosec} A - \sin \varphi_0 \cotg A \\ \sin \varphi &= \sin \varphi_0 \cos \sigma + \cos \varphi_0 \sin \sigma \cos A, \end{aligned}$$

* Es sei hier auch auf den Artikel „Vorhersagen und Anleitung zum Beobachten von künstlichen Erdsatelliten“ von U. Glünzel-Lingner in der Zeitschrift „Sterne und Weltraum“, 1962, Heft 7 (Bibliogr. Institut, Mannheim) hingewiesen.

wobei λ_0, φ_0 die geogr. Koordinaten von B und λ, φ die eines Punktes im Abstand σ und in Azimutrichtung A von B aus sind; siehe Fig. 18 und 19. (Die punktweise Konstruktion der Kurven kann man bei Benutzung einer Karte in stereographischer Projektion umgehen, da dann jeder Kreis auf der Kugel wieder in einen Kreis in der Ebene übergeht.) Für irgendeinen Subsatellitenpunkt λ, φ kann man nun sofort Distanz σ oder s und Azimut A ablesen und die Höhe h des Satelliten über dem Horizont berechnen aus (Fig. 16):

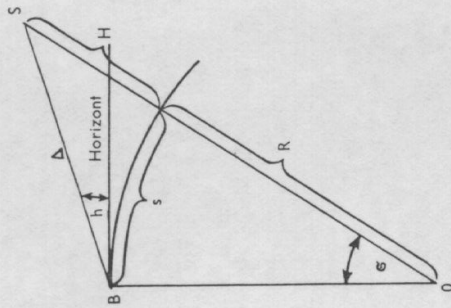


Fig. 16. Zur Berechnung der Winkelhöhe h über dem Horizont aus der Höhe H über der (kugelförmigen) Erde und dem Abstand s bzw. σ des Subsatellitenpunktes vom Beobachtungsort.

$$(21) \quad \frac{\cos h}{\cos (h + \sigma)} = \frac{r}{R} = \frac{R + H}{R}.$$

Aus einem Diagramm (Fig. 17) läßt sich h bequem als Funktion von σ bzw. s und H ablesen. Für Punkte unter der Kurve $h = 0$ ist der Satellit unter dem Horizont.

Das Verfahren, A und σ einfach einer Karte zu entnehmen, wird zu ungenau, wenn der Satellit nahe durch das Zenit von B läuft. Man kann dann A und σ aus folgenden Gleichungen berechnen:

$$(22) \quad \begin{aligned} \sin^2 \frac{\sigma}{2} &= \sin^2 \frac{\Delta \varphi}{2} + \cos \varphi \cos \varphi_0 \sin^2 \frac{\Delta \lambda}{2} \\ \sin A &= \frac{\cos \varphi \sin \Delta \lambda}{\sin \sigma}. \end{aligned}$$

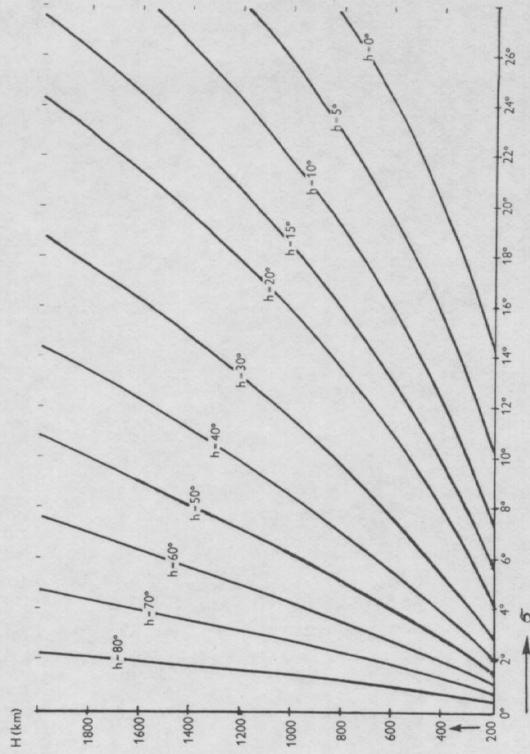


Fig. 17. Diagramm zur Bestimmung von h als Funktion von H und σ .

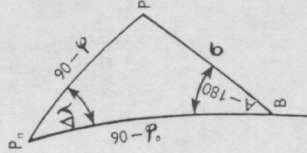


Fig. 18. Zur Berechnung von Azimut und Distanz auf der (kugelförmigen) Erdoberfläche.

Die Formeln sind aus dem sphärischen Dreieck $P_n B S$ (Fig. 18) an der als kugelförmig angenommenen Erdoberfläche abgeleitet, wobei $\Delta \varphi = \varphi - \varphi_0, \Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$ ist und A von Süd über West gerechnet ist. Die erste Gleichung ist aus dem \cos -Satz für σ durch Umformung entstanden. Bei A muß man in der Wahl des richtigen Quadranten vorsichtig sein.

7. Beispiel zur Berechnung eines Durchgangs für einen bestimmten Beobachtungsort

Für die Radiobeobachtungen des Satelliten Explorer VII, 1959 t_1 in Heidelberg waren zum Zweck der Ausrichtung der Antenne folgende Angaben vom Rechenzentrum der NASA (National Aeronautics and Space Administration) im voraus mitgeteilt worden:

Durchgang Nr. 252 vom 31. 10. 1959 (Start am 13. 10. 59)

WZ	Azimit A	Höhe h	Distanz λ
9h 6m 0s	284° (104°)	3°	2 551 km
8 0	283 (103)	12	1 743
10 0	279 (99)	32	984
12 0	170 (350)	77	578
14 0	115 (295)	27	1 074
16 0	112 (292)	11	1 850
18 0	111 (291)	1	2 660

Die Angaben für Azimit und Höhe sind abgekürzt auf ganze Grad gegeben. Dabei sind die nicht eingeklammerten Werte A von Nord über Ost, die eingeklammerten von Süd über West gezählt. Distanz bedeutet den direkten räumlichen Abstand $= \lambda$ in Fig. 16 und in (5).

Diese topozentrischen Angaben wurden mit folgenden Bahnelementen gerechnet:

Epoche $t_0 = 1959$ Okt. 16. 15^h 40^m 70 WZ
 Anomalistische Periode $U_\pi = 101^m 331.56 - 0^m 0005 (t - t_0)$
 $i = 50^m 33$
 $\Omega = 135^m 75 - 4^m 213 (t - t_0)$
 $\omega = 64^m 06 + 3^m 419 (t - t_0)$
 $e = 0.03775$
 $a = 1.12881 R = 7 200$ km
 $M_0 = 228^m 10$

$U_\pi =$ Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Perigäum-Durchgängen, allgemeiner zwischen zwei Bahnpunkten mit gleichem M . Die angegebenen Änderungen pro Tag sind bei U durch den Luftwiderstand, bei Ω und ω durch die Erdabplattung bedingt. Außerdem waren für den 31. 10. 59 noch Angaben über die Knotendurchgänge gemacht, von denen hier folgender Auszug gegeben wird:

Durchgang Nr.	t_Ω (WZ)	λ_Ω	H_Ω
247	0h 17m 11s	32° 24' 0	922 km
248	1 58 27	6 43.3	923
249	3 39 42	— 18 57.5	925
250	5 20 57	— 44 38.3	926
251	7 2 13	— 70 19.0	927
252	8 43 28	— 95 59.7	928

Zunächst sollen die Angaben für den Ω -Durchgang 252 aus den Elementen berechnet werden. Mit $t_\Omega - t_0 = 14^h 17^m 3^s 5 \approx 14^h 17^m$ erhält man die zeitlich veränderlichen Elemente für t_Ω :

$U_\pi = 101^m 324.20 = 101^m 19^s 4$
 $\Omega = 73^m 78$
 $\omega = 114^s 95.$

Bildet man in der Tabelle die Differenzen aufeinanderfolgender Zeiten t_Ω , dann erhält man im Mittel 101m 15s.3, d. h. um 4.1 weniger als U_π . Das erklärt sich mit dem Unterschied zwischen anomalistischer Umlaufzeit von Perigäum zu Perigäum und der Knoten-Umlaufzeit von Knoten zu Knoten. Wegen der Zunahme von ω um 3.42 pro Tag oder um 0.241 pro Umlauf muß ja U_Ω kleiner sein als U_π , und zwar um 0.068 = 4.1, da $n = 3.553/\text{Min.}$ ist (siehe Fig. 38 und 43 und Abschnitt 5.7).

Um t_Ω aus den Elementen zu berechnen, kann man so vorgehen: Durch eine Überschlagsrechnung findet man, daß zwischen t_0 und t_Ω etwa 209 volle Umläufe liegen müssen. Rechnet man $209 \cdot \bar{U}_\pi$, wo $\bar{U}_\pi = 101^m 32.789$ der Mittelwert für Okt. 16 und Okt. 31 ist, dann wird im Zeitpunkt $t_1 = t_0 + 209 \cdot \bar{U}_\pi$ die mittlere Anomalie $M = M_0 = 228^m 10$, wie zur Zeit t_0 sein. Man erhält $t_1 =$ Okt. 31 8^h 37^m 53. Da für den Knoten die wahre Anomalie $v_\Omega = -\omega = 245^m 05$ ist, findet man hierzu entweder aus Tabellen oder genähert aus Fig. 10 zunächst $v - M = -4^m 00$ und also $M_\Omega = 249^m 05$. Der Zeitpunkt t_Ω muß daher um $\Delta t = \frac{M_\Omega - M_0}{n} =$

$= 20.95 = 5^m 90$ später liegen als t_1 , d. h. es ist $t_\Omega = 8^h 43^m 43$, was fast $= 3.553$

genau mit dem Tabellenwert übereinstimmt.

Die Berechnung von λ_Ω vollzieht sich wie folgt:

Sternzeit Greenwich für 1959 Okt. 31, 0^h WZ $\Theta_0^0 = 2^h 34^m 2$ (aus dem Nautic. Almanac)
 $t_\Omega = 8^h 43^m 5$
 Korr. für Sternzeit $= + 1^m 4 (= 0.00274 t_\Omega)$
 Sternzeit Greenwich für $t_\Omega = 11^h 19^m 1$
 $\Omega = 73^m 78$
 $\lambda_\Omega = 95^m 59.4$ West.

Die Angabe der letzten Spalte der Tabelle, die Höhe über dem Äquator, kann aus der Ellipsengleichung (15) berechnet werden oder einfacher, indem man r/a mit den Argumenten M und e aus den oben zitierten Ta-

bellenn entnimmt. Man findet für diesen Fall $r/a = 1.0147$ und damit $r = 7306$ km. Da der Äquatorradius $R = 6378$ km ist, bleibt $H = 928$ km, wie vorausgerechnet. Daß die Werte H von Durchgang zu Durchgang wachsen, erklärt sich durch die Zunahme von ω : das Perigäum rückt weiter nördlich, die Höhe bei der Äquatorüberquerung muß zunehmen. Von den topozentrischen Angaben A , h und λ sollen nur die für 9^h 10^m und 9^h 14^m hier nachgerechnet werden. Für die rasch variierenden Bahnelemente Ω und ω werden dabei ihre Werte für 9^h 12^m, nämlich $\Omega = 73^m 70$ und $\omega = 115^m 01$ benutzt.

Die Koordinaten des Beobachtungsortes (Sternwarte Heidelberg) sind:
 $\lambda_0 = 8^\circ 72'$ Ost, $\varphi_0 = +49^\circ 40'$, $\rho = 6366$ km.

Weltzeit t	$9^h 10^m 00$	$9^h 14^m 00$
$t - t_1$	$32^m 47$	$36^m 47$
ΔM	$115^s 37$	$129^s 58 = n(t - t_1)$
M	$343^s 47$	$357^s 68 = M_0 + \Delta M$
$v - M$	$-1^s 29$	$-0^s 17$ aus Tab. oder Fig. 10
v	$342^s 18$	$357^s 51$
u	$97^s 19$	$112^s 52 = u = v + \omega$
$\alpha - \Omega$	$101^s 17$	$123^s 03$ aus Tab. oder (18)
α	$174^s 87$	$196^s 73$
δ	$+49^s 80$	$+45^s 34$ aus Tab. oder (18)
r	0.9639	0.9622 aus Tab. oder (15)
a	6940 km	6928 km
H	574 km	562 km.

H ist dabei gerechnet als Höhe über einer Kugel mit dem Radius gleich dem Radiusvektor des Beobachtungsortes. (Streng genommen müßte es als Höhe über dem Subsatellitenpunkt auf dem Erdellipsoid gerechnet werden.) Genaue Werte der topozentrischen Koordinaten α, δ, Δ bzw. A, h, Δ wären aus (5) und (6) zu berechnen. Für genäherte Rechnung werden zunächst die Koordinaten des Subsatellitenpunktes bestimmt.

Für die Rechnung nach (19) hat man:

$$\begin{aligned} \Theta_0 &= 11^h 45^m 7 \\ &= 176^s 43 \\ \lambda &= \alpha - \Theta_0 = -1^s 56 \text{ Ost} \\ &= -1^s 56 \text{ West.} \end{aligned}$$

Oder nach (19a):

$$\begin{aligned} t - t_0 &= 26^m 53 \\ \lambda - \lambda_0 &= 6^s 65 \\ \lambda &= 94^s 44 \\ \lambda_0 &= -96^s 00 \\ \lambda &= -1^s 56 \end{aligned}$$

Die Breite wäre ohne Berücksichtigung der Erdabplattung:

$$\varphi (= \delta) = 49^s 80 = 45^s 34;$$

mit Berücksichtigung der Abplattung:

$$\varphi = 49^s 97 = 45^s 52.$$

In Fig. 19 sind nicht nur diese beiden, sondern im ganzen 9 Punkte dieses Durchgangs von Explorer VII eingetragen. Man kann daraus A und σ direkt ablesen oder nach (22) berechnen:

$$\begin{aligned} \Delta \lambda &= -10^s 3 \\ \Delta \varphi &= +0^s 6 \\ &= +10^s 6 \\ &= -3^s 9. \end{aligned}$$

Genauere Rechnung hat wegen der hier gemachten Annahme der Erde als Kugel keinen Sinn.

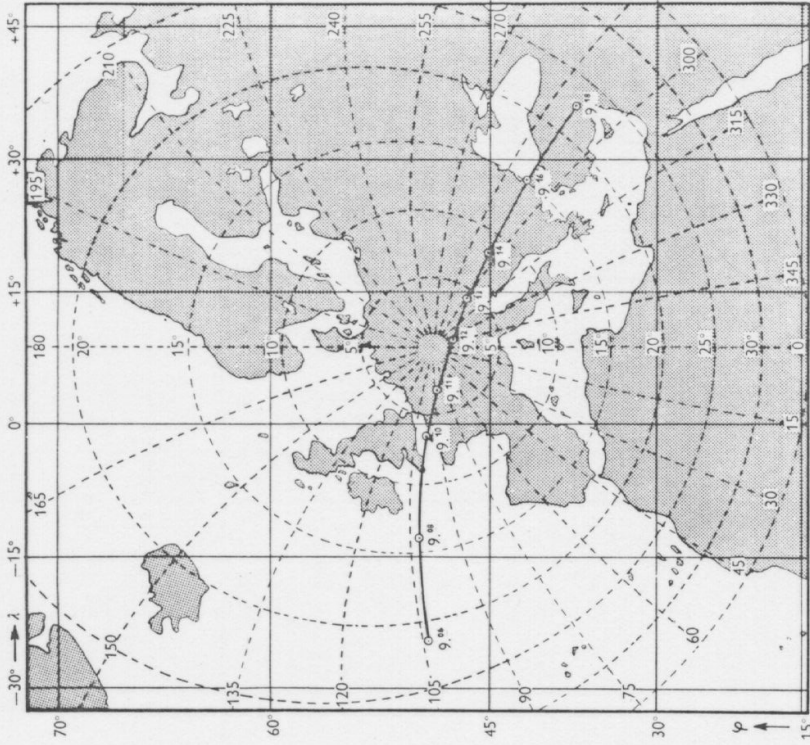


Fig. 19. Kartennetz in Mercatorprojektion mit Kurven gleichen Winkelabstands von je 5° und gleichen Azimuts von je 15° für Heidelberg. Eingezeichnet ist die Projektionskurve eines Durchgangs von Explorer VII am 31. 10. 59 mit Zeitmarken.

σ	$6^s 6$	$8^s 2$
A	99°	296° von Süd über West
h	$32^s 5$	27° aus Fig. 17
Δ	960 km	1120 km.

Die Werte Δ sind nach der aus Fig. 16 leicht abzuleitenden Gleichung

$$\Delta = R \frac{\sin \sigma}{\cos (h + \sigma)}$$

berechnet. Die Übereinstimmung mit den vorausberechneten Daten ist gut.

8. Schattenein- und -austritt

Aus verschiedenen Gründen kann es von Wichtigkeit sein, zu wissen, wann ein Satellit bei einer bestimmten Erdumkreisung in den Erdschatten ein- bzw. aus diesem austritt. Für optische Beobachtungen (visuelle oder photographische) ist es erforderlich, daß der Satellit von der Sonne beschienen wird, also nicht im Erdschatten ist. Außerdem ist es notwendig, daß die Sonne für den Beobachter so tief unter dem Horizont steht, daß der Himmel dunkel genug ist, um den Satelliten als mehr oder weniger hellen Stern am Himmel zu finden. Das schränkt die Sichtmöglichkeiten i. a. auf einen begrenzten Zeitraum nach Ende der Abend- bzw. vor Eintritt der Morgendämmerung ein. Bei günstiger Stellung der Sonne zur Bahnebene und großer Höhe des Satelliten kann auch der Fall eintreten, daß dieser überhaupt nicht in den Erdschatten eintritt und bei jedem Durchgang während der Nacht - falls er überhaupt über den Horizont kommt - beobachtet werden kann.

Es kann auch aus anderen Gründen wichtig sein, zu wissen, wann der Satellit im Schatten ist, etwa bei bemannten Satelliten oder wenn bestimmte Messungen nur im Sonnenlicht bzw. im Schatten ausgeführt werden sollen.

Bei der Berechnung der Schattenzeiten soll wegen der i. a. geringen Höhe der Satelliten der Erdschatten als zylindrisch angenommen und von dem Unterschied zwischen Kern- und Halbschatten sowie von der Strahlenbrechung in der Atmosphäre abgesehen werden.

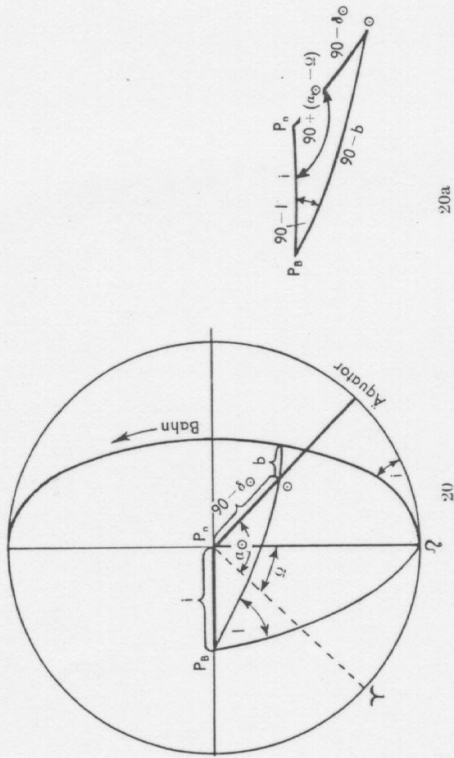


Fig. 20 und 20a. Zur Berechnung der Stellung der Sonne relativ zur Bahnebene eines Satelliten.

Die Zeiten des Schattenein- und -austritts können graphisch gefunden werden, nachdem zunächst die Stellung der Sonne zur Bahnebene berechnet ist. Fig. 20 gibt den Anblick der Sphäre von Norden aus gesehen; der Mittelpunkt ist der nördl. Himmelspol, der Umkreis der Äquator; $P_B =$ Bahnpol, $\odot =$ Sonne. Die Stellung der Sonne zur Bahnebene werde festgelegt durch die beiden Winkel l und b , die aus den Koordinaten $\alpha \odot$ und $\delta \odot$ der Sonne für den betreffenden Tag und den Bahnelementen Ω und i nach den im Dreieck $P_N P_B \odot$ geltenden Gleichungen zu berechnen sind:

$$\begin{aligned} \cos l \cos b &= \cos \delta \odot \cos (\alpha \odot - \Omega) \\ \sin l \cos b &= \sin \delta \odot \sin i + \cos \delta \odot \cos i \sin (\alpha \odot - \Omega) \\ \sin b &= \sin \delta \odot \cos i - \cos \delta \odot \sin i \sin (\alpha \odot - \Omega). \end{aligned}$$

Fig. 21 zeigt für einen allgemeinen Fall die Konstruktion der Schattenellipse in der Bahnebene (= Papierebene). Sie ist der Schnitt des Schattenzylinders der Erde mit der Bahnebene; ihre halbe Längsachse ist

$$L = \frac{R}{\sin b}$$

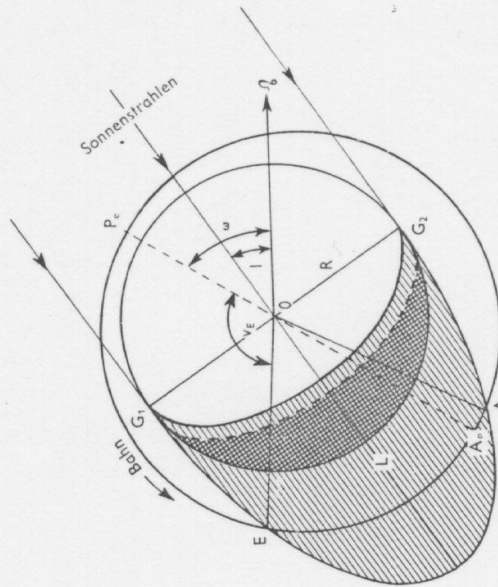


Fig. 21. Graphische Bestimmung des Schattenein- und -austritts. Die Bahn ist willkürlich angenommen. Die Pfeile stellen die Projektion der Sonnenstrahlen auf die Bahnebene dar.

Aus der Figur lassen sich die wahren Anomalien für die Punkte E und A des Ein- bzw. Austritts ablesen und daraus über die mittleren Anomalien die Zeiten für E und A errechnen. Die Linie $G_1 G_2$, parallel zur Schat-

tengrenze auf der Erdoberfläche, soll die Dämmerungsgrenze markieren, die mindestens 10° bis 12° „hinter“ der Schattengrenze verläuft. Erst für Orte hinter dieser Grenze ist der Himmel für optische Beobachtungen genügend dunkel.

Als Beispiel sind in Fig. 22 die Schattenverhältnisse in der Bahnebene von Echo I für die Zeiten 1960 Aug. 21.0, Aug. 28.0 und Sept. 11.0 gezeichnet.

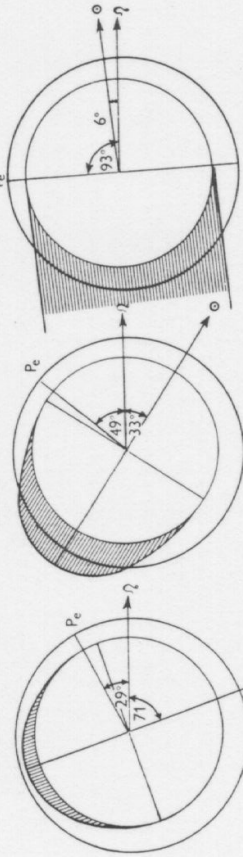


Fig. 22. Schattenverhältnisse in der Bahnebene von Echo I am 21. 8., 28. 8. und 11. 9. 1960. Der innere Kreis ist jeweils die Erde, der äußere, exzentrisch gelegene, die Bahn.

net, wobei die Knotenrichtung Ω jedesmal nach rechts gezeichnet wurde. Die zugehörigen Daten sind ($i = 47^{\circ}2$):

	Aug. 21.0	Aug. 28.0	Sept. 11.0
α_{\odot}	150°0	156°5	169°2
δ_{\odot}	+ 12°2	+ 9°8	+ 4°6
Ω	230°0	208°3	165°0
ω	29°0	49°4	92°8
l	289°	327°	6°
b	+ 58°	+ 43°	0°
L	1.178 R	1.464 R	∞

Die Bahn verlief am 21. 8. völlig außerhalb des Schattens, doch haben sich die Verhältnisse rasch geändert. Die Angabe $L = \infty$ für den 11. 9., als die Sonne genau in der Bahnebene stand, ist nur theoretisch zu verstehen: der Kernschatten der Erde ist kegelförmig und erstreckt sich nicht ins Unendliche. Bei der Rechnung wurde er aber als zylinderförmig angenommen.

Man kann die Schattenzeiten für einen bestimmten Umlauf auch aus folgender Überlegung finden: in Fig. 23 stehe der Satellit gerade auf dem Rand des Schattenzylinders. Sein r berechnet sich dann aus $r_s = \frac{R}{\sin z_{\odot}}$,

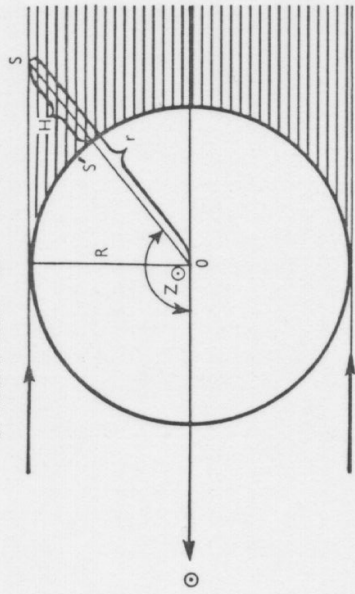


Fig. 23. Zur Geometrie des Schattenein- und -austritts.

wobei z_{\odot} , wie man leicht überlegt, die Zenitdistanz der Sonne im Subsellitenpunkt S' ist und aus der Gleichung

$$\cos z_{\odot} = \sin \delta_{\odot} + \cos \delta \cos \delta_{\odot} \cos (\alpha - \alpha_{\odot})$$

zu berechnen ist. Man kann die Richtung dieser Gleichung aus Fig. 20 erkennen, wenn man S irgendwo auf der Bahn annimmt; z_{\odot} ist dann der Bogen größten Kreises \widehat{SO} .

Hat man aus den Bahnelementen für bestimmte Zeiten eine Reihe von Werten der geozentrischen Koordinaten α, δ, r bestimmt, dann kann man aus α, δ jeweils das zugehörige z_{\odot} und r_s berechnen. Für den Zeitpunkt des Schattenein- oder -austritts muß $r = r_s$ sein.

Als Beispiel diene die Beobachtung des Schatteneintritts von Echo I am 11. 9. 60 um 20^h 32^m 30^s WZ. Aus den vom Smithsonian Institution, Astrophysical Observatory, veröffentlichten Bahnelementen findet man für diesen Zeitpunkt:

$$\begin{aligned} \Omega &= 162^{\circ}4 & a &= 7978 \text{ km} \\ i &= 47^{\circ}2 & U_{\pi} &= 118.200 \text{ Min} \\ \omega &= 95^{\circ}4 & e &= 0.0268 \\ M &= 36^{\circ}7. \end{aligned}$$

Damit zunächst:

$$\begin{aligned} v &= 38^{\circ}6 \\ u &= 134^{\circ}0 \\ \alpha - \Omega &= 144^{\circ}9 \\ \alpha &= 307^{\circ}3 \\ \delta &= 31^{\circ}9 \\ r &= 7807 \text{ km.} \end{aligned}$$

Mit den Sonnenkoord. $\alpha_{\odot} = 170^{\circ}0$
 $\delta_{\odot} = +4^{\circ}3$
 findet man weiter: $z_{\odot} = 125^{\circ}6$
 $r_s = 7836 \text{ km.}$

Der Unterschied $r_s - r = 29$ km ist nicht groß, wenn man beachtet, daß sich 10^8 später r_s bereits um 60 km größer errechnet, während r fast unverändert bleibt.

Bei dem Verfahren der graphischen Konstruktion mit der Schattenellipse in der Bahnebene rechnet man zunächst $l = 8:3$, $b = -2:6$, $L = 22:9$ R aus. Die Verhältnisse sind also ähnlich wie in Fig. 22c. Aus einer Zeichnung nach Art von Fig. 21 wurde $v = 38:8$ bzw. $v = 145:6$ für die Punkte E und A abgelesen. Das v für den Eintritt weicht nur um 0:2 von dem oben berechneten Wert ab, so daß sich auch hieraus der Zeitpunkt des Schatteneintritts praktisch in Übereinstimmung mit der Beobachtung ergibt.

KAPITEL III

KURZE THEORIE DES ZWEIKÖRPERPROBLEMS FÜR MASSENPUNKTE

1. Grundgleichungen; Flächen- und Energie-Integral

Es soll hier das Problem vereinfacht behandelt werden:

1) für künstliche Satelliten kann man die Masse m gegenüber der Erdmasse M vernachlässigen, so daß der Erdmittelpunkt auch Massenzentrum des Systems ist;

2) die Bewegung des Satelliten erfolgt in einer Ebene durch den Erdmittelpunkt, was sich auch leicht aus dem allgemeinen Ansatz beweisen läßt.

Die Differentialgleichungen der Bewegungen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem in der Bahnebene lauten dann, da nach Newton die auf den Satelliten in Richtung nach dem Erdmittelpunkt hin wirkende Kraft

$$K = -\frac{GMm}{r^2} \text{ ist:}$$

$$(24) \quad \ddot{x} = -\mu \frac{x}{r^3} \quad (= \text{Beschleunigungskomponente in } x\text{-Richtung})$$

$$\ddot{y} = -\mu \frac{y}{r^3} \quad (= \text{Beschleunigungskomponente in } y\text{-Richtung}).$$

Hierbei ist $GM = \mu$ gesetzt*; Differentiationen nach der Zeit werden

$$\text{durch Punkte angedeutet: } \dot{x} = \frac{dx}{dt}; \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

In Polarkoordinaten:

$$(25) \quad \ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2 = -\frac{\mu}{r^2} \quad (= \text{Beschleunigungskomponente in } r\text{-Richtung})$$

$$(26) \quad r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 \quad (= \text{Beschleunigungskomponente in } \varphi\text{-Richtung}).$$

* Für nicht verschwindende Satellitenmasse m wäre $\mu = M + m$ zu setzen, um die Bewegung des Satelliten um den Erdmittelpunkt, der dann nicht mehr Schwerpunkt des Systems ist, zu beschreiben. Dadurch wird die Beschleunigung, die M durch die Anziehung von m erfährt, berücksichtigt.

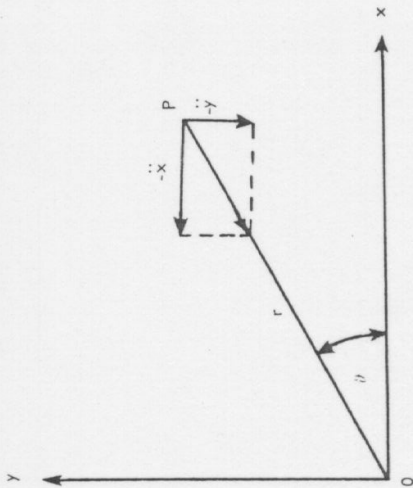


Fig. 24. Beschleunigungskomponenten in rechtwinkligen Koordinaten.

Die zweiten Glieder der linken Seiten stellen die Zentrifugal- bzw. Coriolis-Beschleunigung dar. Aus (26) folgt sofort:

$$(27) \quad \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0 \text{ oder } r^2 \dot{\theta} = \text{const} = c_1.$$

Das ist der mathematische Ausdruck für den Flächensatz (auch Satz von der Erhaltung des Drehimpulses), d. h. für das 2. Keplersche Gesetz, da $r^2 d\theta = 2 dF$ gleich der doppelten Fläche zwischen den Radienvektoren für θ und $\theta + d\theta$ ist. Es ist also $F = \frac{c_1}{2} (t - t_0)$.

Durch Multiplikation von (24) mit \dot{x} bzw. \dot{y} und Addition:

$$\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} = -\frac{\mu}{r^3} (x\dot{x} + y\dot{y})$$

oder:

$$\frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = -\frac{\mu}{r^3} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) = 2\mu \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right).$$

Nach Integration:

$$(28) \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = V^2 = \frac{2\mu}{r} + c_2.$$

V = Geschwindigkeit, c_2 = Integrationskonstante. Dieses sog. Integral der lebendigen Kraft drückt hier, wo $m \approx 0$ angenommen ist, die Tatsache aus, daß die Gesamtenergie des Satelliten konstant bleibt. Diese ist

$$(29) \quad E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} m V^2 - \frac{m\mu}{r} = \frac{m}{2} c_2,$$

wobei E_{pot} so definiert ist, daß es 0 wird für $r = \infty$. Der Unterschied der potentiellen Energie zwischen $r = r$ und $r = \infty$ ist ja gleich der Arbeit, die geleistet werden muß, um den Satelliten vom Abstand r ins Unendliche zu bringen, also gleich

$$\int_r^{\infty} \frac{\mu m}{r^2} dr = \frac{\mu m}{r}.$$

2. Die Bahngleichung

Mit Hilfe des Flächenintegrals kann man wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{c_1}{r} \right) \\ d^2 \left(\frac{c_1}{r} \right) &= \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{c_1}{r} \right) \dot{\theta} = -\frac{c_1}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{c_1}{r} \right). \end{aligned}$$

In (25) eingesetzt:

$$(30) \quad \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{c_1}{r} \right) + \frac{c_1}{r} = \frac{\mu}{c_1}.$$

Mit der Substitution $\frac{c_1}{r} - \frac{\mu}{c_1} = z$ wird hieraus:

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z = 0.$$

Die Lösung läßt sich schreiben:

$$z = c_3 \cos(\theta - c_4)$$

oder:

$$(31) \quad r = \frac{\mu}{c_1} + c_3 \cos(\theta - c_4).$$

Vergleicht man dies mit der Polargleichung eines Kegelschnitts, wobei der Pol im einen Brennpunkt ist und der Winkel ν von der Richtung nach dem polnächsten Punkt aus gerechnet wird (ν = wahre Anomalie),

$$(32) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \nu} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}$$

so erkennt man, daß (31) einen Kegelschnitt darstellt. Dabei ist für die

- Ellipse: $e < 1$, a positiv
- Parabel: $e = 1$, $a = \infty$
- Hyperbel: $e > 1$, a negativ.

Wichtig ist die Festlegung der Konstanten c_1 durch Vergleich von (31) und (32):

$$(33) \quad c_1 = r^2 \frac{d\dot{\theta}}{dt} = r^2 \frac{dv}{dt} = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$$

Das 3. Keplersche Gesetz

Da die vom Radiusvektor im Zeitraum $(t - t_0)$ überstrichene Fläche gleich ist $F = \frac{c_1}{2}(t - t_0)$, so ist die während eines Umlaufs in der Ellipse überstrichene Fläche, d. h. die ganze Ellipsenfläche:

$$\pi a b = \frac{c_1}{2} U.$$

Mit $b = a \sqrt{1 - e^2}$ und c_1 aus (33):

$$U^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3.$$

Das ist aber identisch mit (8), nur daß hier a allgemeiner die große Halbachse der Ellipse, dort den Radius einer Kreisbahn bedeutet.

4. Geschwindigkeit, Bahnform, „Schußweite“

Die Geschwindigkeit V setzt sich aus den beiden Komponenten V_r und V_ϕ zusammen nach (Fig. 25):

$$V^2 = V_r^2 + V_\phi^2 = (\dot{r})^2 + r^2(\dot{\theta})^2.$$

Durch Differentiation der Bahngleichung (32) und Benutzung von (33):

$$(34) \quad V_r = \dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin v$$

$$(35) \quad V_\phi = r \dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mu p}{r}}$$

$$V^2 = \frac{\mu}{p} \left(e^2 \sin^2 v + \frac{p^2}{r^2} \right).$$

Aus (32) leitet man ab: $e^2 \sin^2 v = e^2 - \left(\frac{p}{r} - 1\right)^2$; und beachtet man

noch: $p = a(1 - e^2)$, so folgt schließlich die wichtige Gleichung:

$$(36) \quad V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

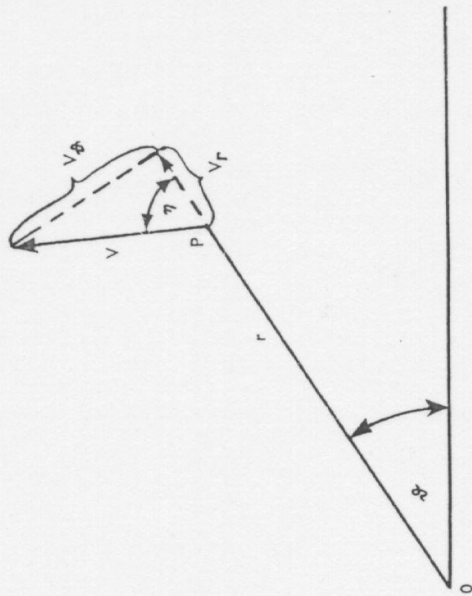


Fig. 25. Geschwindigkeitskomponenten in Polarkoordinaten.

Vergleich mit (28) gibt $c_2 = -\frac{\mu}{a}$ und zeigt, daß die Gesamtenergie des Satelliten nur von a abhängt und negativ ist für die Ellipse, positiv für die Hyperbel.

Bei einer Kreisbahn teilt sich die Gesamtenergie $E = -\frac{1}{2} \frac{m\mu}{a}$ auf in

$$E_{\text{Kin}} = \frac{1}{2} \frac{m\mu}{a} \quad \text{und} \quad E_{\text{Pot}} = -\frac{m\mu}{a}.$$

Der Grenzfall $a = \infty$ führt zur parabolischen oder Entweichgeschwindigkeit

$$(37) \quad V_P^2 = \frac{2\mu}{r},$$

während für die Kreisbahngeschwindigkeit im Abstand r gilt:

$$V_K^2 = \frac{\mu}{r}$$

$$V_P = \sqrt{2} V_K.$$

Ferner zeigt (36), daß a nur abhängt von r und der Größe, nicht aber der Richtung von V , d. h. alle Bahnen, die im gleichen Abstand r gleiches V haben, haben auch gleiches a .

Bei der Ellipse leitet man für $r = a(1 - e)$ bzw. $r = a(1 + e)$, d. h. für Perigäum bzw. Apogäum ab:

$$(38) \quad \left. \begin{aligned} V_{Pe}^2 &= \frac{\mu}{a} \frac{1+e}{1-e} \\ V_{Ap}^2 &= \frac{\mu}{a} \frac{1-e}{1+e} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} V_{Pe} &= \frac{1+e}{1-e} \\ V_{Ap} &= \frac{1-e}{1+e} \end{aligned}$$

Fig. 26 zeigt eine Auswahl von Bahnen, die man sich dadurch entstanden denken kann, daß in P ein Körper mit verschiedenem V , aber in stets gleicher Richtung und zwar senkrecht zu r , „abgeschossen“ wird. Er wird dann, vom Grenzfall der Geraden PO für $V = 0$ ausgehend, zunächst langgestreckte Ellipsen beschreiben (daß diese z. T. die Erdoberfläche schnei-

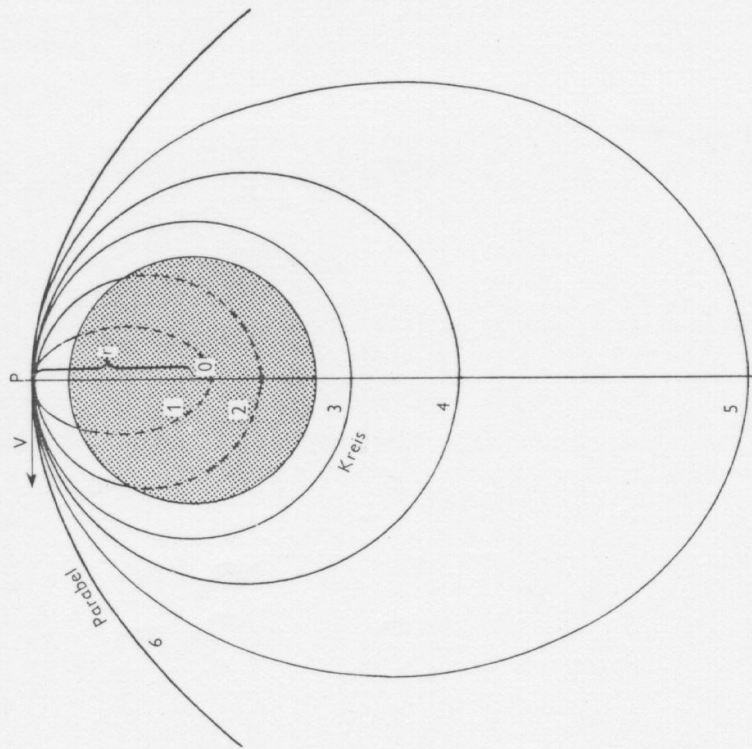


Fig. 26. Bahnkurven bei horizontalem Abschluß im Punkt P mit verschiedener Anfangsgeschwindigkeit V . Schraffierter Kreis = Erde.

den, ist hier ohne Belang), wobei P Apogäum ist. Dabei wächst a mit zunehmendem V , während e abnimmt bis zur Kreisbahn. Für $V > V_K$ nehmen a und e bis zum Grenzfall der Parabel zu, wobei P die Rolle des Perigäums übernommen hat. Stets ist O ein Brennpunkt.

Man kann also folgenden Satz formulieren: eine Zunahme von V im Perigäum (ein positiver Impuls) vergrößert a und e , im Apogäum aber nur a , während e abnimmt.

Die Gleichungen, nach denen a und e für den hier angenommenen Fall ($V \perp r$) zu berechnen sind, lauten:

$$a = \frac{r}{2 - \left(\frac{V}{V_K}\right)^2}$$

$$e = \begin{cases} 1 - \left(\frac{V}{V_K}\right)^2 & \text{für } V < V_K \\ \left(\frac{V}{V_K}\right)^2 - 1 & \text{für } V > V_K \end{cases}$$

Sie zeigen, daß a sehr rasch wächst, wenn V nahe an $V_P = \sqrt{2} V_K$ herankommt. Auch die Zahlen der Tabelle 3 zeigen das, bei der horizontalen Abschluß von der Erdoberfläche aus angenommen ist und D die Distanz des fernsten Bahnpunktes von O bedeutet.

Zwar haben diese speziellen Werte nur theoretische Bedeutung, da kein Satellit vom Erdboden aus horizontal abgeschossen wird, doch geben sie ein gutes Bild von den Bahnänderungen bei wachsendem V .

Tabelle 3

Flugbahnen bei horizontalem Abschluß eines Körpers an der Erdoberfläche für verschiedene Anfangsgeschwindigkeiten; Erde als Kugel mit 6378 km Radius und ohne Atmosphäre angenommen.

V (km/sec)	$\frac{V}{V_K}$	$\frac{V}{V_P}$	a (km)	e	D (km)
2	0.25	0.18	3 290	0.94	200
4	0.51	0.36	3 650	0.74	920
6	0.76	0.54	4 480	0.42	2 580
7.91	1.00	0.707	6 378	0.00	6 378
8	1.01	0.71	6 500	0.02	6 620
9	1.14	0.80	9 010	0.34	11 640
10	1.26	0.89	15 740	0.60	25 100
11.0	1.391	0.984	99 500	0.94	192 600
11.10	1.403	0.9924	221 000	0.97	435 000
11.185	1.414	1.000	∞	1.00	∞

Während der fernste Punkt bei $V = 11.0$ km/sec genau in halber Mondentfernung liegt, liegt er bei $V = 11.1$ km/sec bereits rund 50000 km jenseits der Mondbahn!

Gleichung (36) erlaubt z. B. auch, die Geschwindigkeitsänderung auszurechnen, die erforderlich ist, um einen Satelliten von einer elliptischen Bahn in eine andere elliptische, parabolische oder auch hyperbolische Bahn zu bringen, etwa in eine Flugbahn nach dem Mond oder einem Planeten (bei dem Flug nach einem Planeten geht die hyperbolische Bahn im Erdfeld in eine elliptische Bahn um die Sonne über) oder, durch Rückstoß bei einem Landemanöver, in eine engere Ellipse.

Ein Satellit habe eine Bahn mit $H_{Pe} = 300$ km, $H_{Ap} = 400$ km. Beim Passieren des Perigäums soll durch Abbremsung die Geschwindigkeit so vermindert werden, daß der bisherige Perigäumspunkt Apogäum wird, das neue Perigäum, das dann in die Richtung des alten Apogäums zu liegen kommt, aber nur eine Höhe von 250 km hat. Die neue Bahn soll also haben: $H_{Pe} = 250$ km, $H_{Ap} = 300$ km.

Mit einem Erdradius $R = 6370$ km gilt für die erste Bahn:

$$a = 6720 \text{ km}, V_{Pe} = 631.35 \sqrt{\frac{2}{6670} - \frac{1}{6720}} = 7.7593 \text{ km/sec}$$

(siehe Gleichung 12) und für die neue Bahn:

$$a = 6645 \text{ km}, V_{Ap} = 631.35 \sqrt{\frac{2}{6670} - \frac{1}{6645}} = 7.7159 \text{ km/sec}.$$

Die erforderliche Geschwindigkeitsverminderung beträgt also 43.4 m/sec. Einen allgemeineren Fall stellt Fig. 27 dar: die dem Körper in P erteilte Geschwindigkeit wird wieder variiert, die Richtung bleibt konstant, aber nicht senkrecht zu r . Alle dabei entstehenden Kegelschnitte haben die gleiche Tangente in P und da nach einem bekannten Satz über Kegelschnitte die Winkel zwischen Tangente und den Richtungen nach den beiden Brennpunkten gleich sind, müssen die zweiten Brennpunkte F_1 bis F_5 auf ein und derselben Geraden liegen. Bei gegebenem V und r kann a aus (36) berechnet werden. Dann sind die Abstände PF_1, PF_2, \dots jeweils gleich $2a - r$, womit F_1, F_2, \dots und damit der jeweilige Kegelschnitt festgelegt sind. Die 5 eingezeichneten Kegelschnitte gehören zu den Werten $\frac{V}{V_K} = 0.5, 1.0, 1.2, \sqrt{2}$ und 2.0, wo V_K die zu r gehörige Kreisbahngeschwindigkeit ist (ein Kreis tritt in diesem Fall natürlich nicht auf). Es sind also die Bahnen 1, 2 und 3 Ellipsen, 4 ist die Parabel und 5 eine Hyperbel. Mit zunehmendem V wächst a ; e nimmt zunächst ab bis zu einem Minimum bei Kurve 2, um dann wieder zuzunehmen und die große Achse dreht sich stets in gleichem Sinn. Bei Kurve 2 ist P Endpunkt der kleinen Achse; der andere Endpunkt ist P_1 . Stellt man

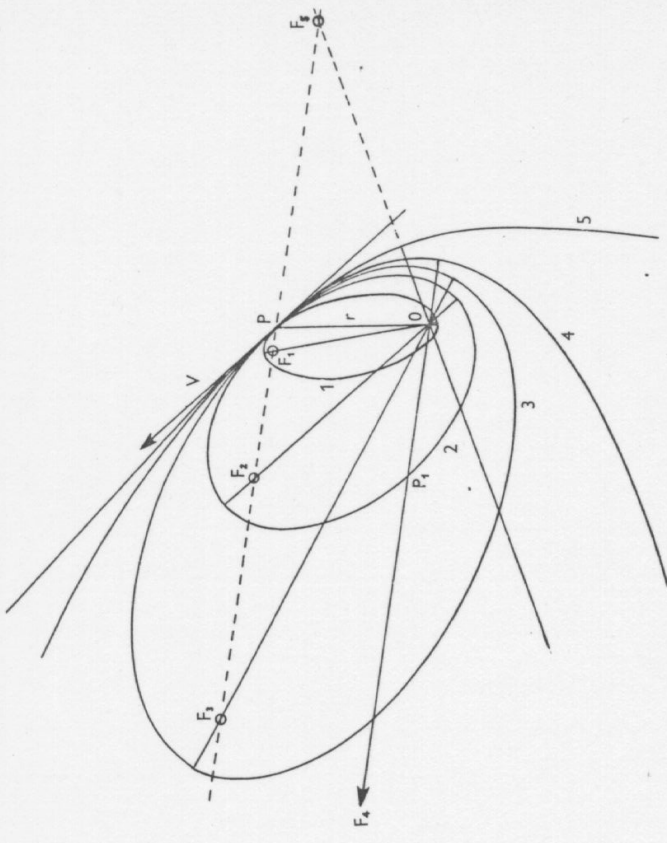


Fig. 27. Bahnkurven für den Fall verschieden großer, aber gleichgerichteter Geschwindigkeit V in P , wenn V einen Winkel von 140° mit dem Radiusvektor r bildet. F_1 bis F_5 sind die zweiten Brennpunkte der jeweiligen Kegelschnitte.

sich vor, daß P_1 die Rolle von P übernimmt, daß also in P_1 die Geschwindigkeit in Richtung der Tangente (nach rechts unten) variiert wird, dann liegen die zweiten Brennpunkte auf $P_1 F_2$ und wandern mit wachsendem V nach links oben – die große Achse dreht sich im umgekehrten Sinne. Man kann auch formulieren: ein + Impuls in P wirkt auf die große Achse in gleichem Sinn wie ein – Impuls in P_1 . (P und P_1 als Endpunkt der kleinen Achse). Diese Überlegung spielt in 7.3 bei der Besprechung der Wirkung des Strahlungsdrucks eine Rolle.

5. Die Koordinaten als Funktion der Zeit

Durch Elimination von $e \sin v$ aus (34) mit Hilfe von (32) erhält man:

$$(\dot{r})^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{p}{r^2} \right) = \frac{\mu}{a r^2} [a^2 e^2 - (a - r)^2].$$

Nach dem 3. Keplerschen Gesetz ist $\mu = n^2 a^3$ (Gleichung 9). Damit:

$$\frac{r dr}{a \sqrt{a^2 e^2 - (a - r)^2}} = n dt.$$

Die Integration kann durch die Substitution $r = a - a e \cos E$ [siehe (16)] ausgeführt werden und führt zu:

$$E - e \sin E = n (t - t_0).$$

Das ist aber wieder die Keplersche Gleichung, womit man auch auf diesem Weg bei den Formeln von 2.3 angelangt ist, mit denen man die Koordinaten r und v in der Bahnebene als Funktion der Zeit berechnen kann.

6. Ortsvektor, Geschwindigkeitsvektor und Bahnelemente; Abschußbedingungen für eine bestimmte Bahn

Sind für einen bestimmten Zeitpunkt Ort und Geschwindigkeit, d. h. x, y, z und $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ gegeben, dann ist die Bahn eindeutig festgelegt und die 6 Bahnelemente lassen sich aus diesen Werten berechnen. Zunächst ist durch Orts- und Geschwindigkeitsvektor* die Bahnenebene definiert; i und Ω sowie der Bahnwinkel u lassen sich durch rein geometrische Überlegungen leicht bestimmen. Aus (36) folgt a , aus (35) p , da V_ϕ , die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu r , aus den gegebenen Daten berechnet werden kann. Damit ist auch e bekannt; (32) oder (34) liefert v und weiter $\omega = u - v$.

Umgekehrt kann man fragen: welche Bedingungen müssen im Zeitpunkt des Übergangs in den freien Flug erfüllt sein, um eine bestimmte Bahn zu erzielen? Um ein bestimmtes i zu erzielen, muß der Abschuß in einer Richtung (Azimut) erfolgen, die man ungefähr als Tangentialrichtung an die Projektionsbahn im Abschußpunkt ablesen kann. Welche Genauigkeit man erzielen kann, zeigt u. a. die Übereinstimmung der i -Werte für Sputnik I, II und III mit $65^\circ 1'$, $65^\circ 3'$ und $65^\circ 2'$. Aus der Lage des Abschußortes (bzw. des Brennschlußortes) folgt, zusammen mit i , der Bahnwinkel u und mit den vorgegebenen Werten von ω , a und e aus $r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(u - \omega)}$ und $H = r - R$ die Höhe, in die der Satellit durch Raketen gebracht werden muß. Seine Geschwindigkeit bei Brennschluß ist wieder aus (36) zu berechnen und die Richtung von V gegen r , d. h. der Winkel η (Fig. 25) aus:

* Da in diesem Buch keine Vektorrechnung angewandt wird, werden auch keine eigenen Buchstaben für Vektoren wie r oder V benutzt. Es dürfte dies kaum zu Verwechslungen führen.

$$\tan \eta = \frac{V_\phi}{V_r} = \frac{1 + e \cos v}{e \sin v} \left(= \frac{r}{a} \frac{dv}{dr} \right).$$

Um z. B. eine langgestreckte Bahn zu erzielen, kann man P als Perigäumspunkt, also $\eta = 90^\circ$ wählen, aber V wesentlich größer machen als das zu r gehörige V_K . Da es i. a. auf die Lage des Perigäums, d. h. auf ω nicht ankommt (diese ändert sich sowieso im Laufe der Zeit), kann man den Ort des Brennschlusses als Perigäum oder Apogäum nehmen. Die Flugbahn muß dann in diesem Punkt horizontal verlaufen und das erforderliche r und V errechnet sich aus $r = a(1 \pm e)$ und aus (38). Bei der Praxis des Abschusses ist natürlich noch der Einfluß der Erdrotation auf Größe und Richtung der Geschwindigkeit im Brennschlußpunkt relativ zur Erdoberfläche zu berücksichtigen.

auf ihn wirkende Kraft die Anziehung einer als Massenpunkt zu betrachtenden Erde wäre. Wegen der Störungen bewegt sich der Satellit aber nicht auf dieser Ellipse weiter, Ort und Geschwindigkeit ergeben vielmehr jeweils andere, im Laufe der Zeit mehr oder weniger rasch variierende Ellipsen. Jede einzelne dieser Ellipsen wird instantane oder oskulierende Ellipse genannt; die gestörte Bahn ist die Einhüllende dieser Ellipsen.

Dabei sollen in jeder oskulierenden Ellipse die Gleichungen des 2-Körper-Problems gelten, so daß sich also z. B. der Ort für einen bestimmten Zeitpunkt mit den für diesen Zeitpunkt gültigen oskulierenden Elementen nach den Formeln von 2.3 und 2.4 berechnet.

Aufgabe der Störungsrechnung ist es, die Gleichungen für die zeitlichen Änderungen der Bahnelemente als Funktion der störenden Kräfte aufzustellen.

Der Satellit habe im Punkt P die Geschwindigkeit V . Die dazu gehörende instantane Ellipse liege in der Papierebene (Fig. 28). Die durch störende

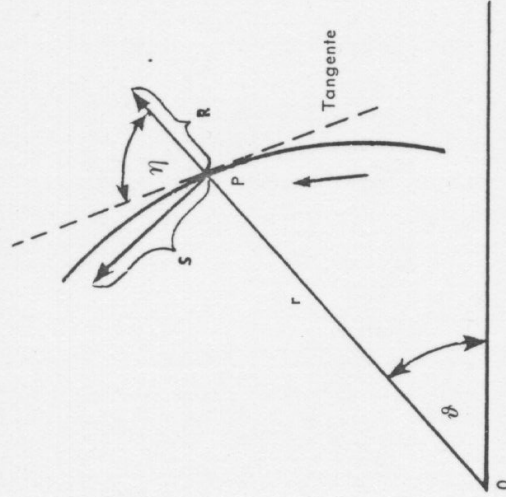


Fig. 28. Komponenten R und S einer Störbeschleunigung in der Bahnebene.

Kräfte hervorgerufene Beschleunigung wird zerlegt in die Komponenten R in Richtung von r , S senkrecht dazu, in Richtung der Bewegung und W senkrecht zur Bahn (= Papier-)Ebene, positiv nach Norden. Die Wirkung von R , S , W besteht darin, daß die Geschwindigkeitskomponenten in den jeweiligen Richtungen nach der Zeit dt geändert sind um

KAPITEL IV

STÖRUNGSRECHNUNG

1. Allgemeines über Störungen

Die Bewegung des Satelliten erfolgt aus den in der Einleitung aufgezählten Gründen nicht genau nach den Gesetzen des 2-Körperproblems für Massenpunkte; über längere Zeit hinweg werden die Abweichungen sehr groß. Prinzipiell kann man natürlich die Differentialgleichungen der Bewegung unter Berücksichtigung aller auf den Satelliten wirkenden Kräfte aufstellen. An eine Integration ist dann aber nicht mehr zu denken. Man kann die Integration allenfalls numerisch in geeigneten zeitlichen Schritten durchführen, erhält dann aber nur Koordinatenwerte als Funktion der Zeit, die keine anschauliche Vorstellung geben von den Änderungen, die die Bahn dadurch erfährt, daß zu der Anziehungskraft der Erde als Massenpunkt noch „störende“ Kräfte hinzukommen. Eine numerische Integration der Differentialgleichungen 2. Ordnung (z. B. (60)) erfordert auch mit Elektronenrechnern eine lange Rechenzeit, da auf einen Umlauf bereits einige 100 Integrations-schritte kommen.

Man betrachtet daher die Bewegung des Satelliten auch weiterhin als Keplersche Bewegung, die aber durch zusätzliche Kräfte „gestört“ ist. Das kann man tun, solange die störenden Kräfte klein sind gegenüber der Anziehung der Erde als Massenpunkt, also für Satelliten, die in nicht zu großer Entfernung kreisen oder kurz vor dem Absturz in der dichteren Atmosphäre stehen.

2. Störungen in den Elementen

Die im folgenden benutzte Methode der Störungsrechnung ist in der Astronomie unter dem Namen „Variation der Elemente“ oder „Störungen in den Elementen“ bekannt und beruht auf folgender Überlegung: in jedem Zeitpunkt hat der Satellit einen bestimmten Orts- und Geschwindigkeitsvektor. Diese bestimmen eine Keplersche Ellipse (siehe 3.6), d. h. eine Ellipse, in der sich der Satellit nach den Keplerschen Gesetzen in alle Zukunft bewegen würde, wenn die einzige

$\mathbf{R} dt$, $\mathbf{S} dt$ und $\mathbf{W} dt$ (Beschleunigung = Änderung der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit). Die Geschwindigkeitskomponenten in der ursprünglichen Ellipse sind $V \cos \eta$, $V \sin \eta$ und 0, die in der oskulierenden Ellipse nach der Zeit dt also $(V \cos \eta + \mathbf{R} dt)$, $(V \sin \eta + \mathbf{S} dt)$ und $\mathbf{W} dt$. Die Aufgabe besteht nun darin, die Änderung der Bahnelemente als Folge der angegebenen Geschwindigkeitsänderungen zu berechnen, d. h. Gleichungen aufzustellen für $\frac{da}{dt}$, $\frac{de}{dt}$ usw. als

Funktionen von \mathbf{R} , \mathbf{S} und \mathbf{W} . Dabei spielen noch folgende Überlegungen eine Rolle: während sich z. B. die Geschwindigkeitskomponente in r -Richtung, also $V_r = V \cos \eta$ durch die Störbeschleunigung \mathbf{R} nach dem Zeitintervall dt um $\mathbf{R} dt$ geändert hat, hat sich r selbst durch die Störbeschleunigung geändert um $\frac{1}{2} \mathbf{R} (dt)^2$, d. h. r kann beim Übergang

von der oskulierenden Ellipse zur Zeit t_0 zu der oskulierenden Ellipse zur Zeit $t_0 + dt$ als konstant angenommen werden. Das bedeutet natürlich nicht, daß sich r von t_0 bis $t_0 + dt$ nicht ändert! Es ändert sich selbstverständlich infolge der Bahnbewegung des Satelliten und würde sich ohne Störbeschleunigung genau entsprechend den Keplerschen Gesetzen ändern, doch handelt es sich hier nur um den Unterschied in dem r -Wert (allgemeiner in den Ortskoordinaten), wie er sich für den Zeitpunkt $t_0 + dt$ mit den Elementen der zur Zeit t_0 oskulierenden Ellipse berechnet, gegenüber dem Wert, wie er sich für diesen Zeitpunkt mit den Elementen der zur Zeit $t_0 + dt$ oskulierenden Ellipse berechnet. Und dieser Unterschied ist von der Ordnung $(dt)^2$, wogegen der Unterschied in V von der Ordnung dt ist und allein Anlaß für die Änderung der Elemente ist.

Ein einfaches, wenn auch nicht ganz zutreffendes Analogon hierzu bildet die Beziehung einer Kurve $y = f(x)$ zu den Tangenten im Punkt x_0, y_0 und $x_0 + dx, y_0 + dy$. Die Tangentenrichtungen in diesen Punkten sind verschieden (dies entspricht der Änderung des Geschwindigkeitsvektors durch die Störbeschleunigung), dagegen berechnet sich y für $x = x_0 + dx$ für Kurve und Tangente bis auf Größen der Ordnung $(dx)^2$ gleich.

Man kann die Beziehung der oskulierenden Ellipsen zur tatsächlichen Bahnkurve auch als Berührung höherer Ordnung auffassen, da beide den Ort und den Geschwindigkeitsvektor nicht nur nach Richtung (Tangente), sondern auch nach Größe gemeinsam haben.

Auf Grund der soeben angestellten Betrachtungen kann man z. B. aus Gleichung (36) leicht die Formel für $\frac{da}{dt}$ herleiten. Diese Gleichung

stellt ja eine Beziehung zwischen V , r und a dar. Für konstantes a liefert sie den Wert von V für die Keplersche Bewegung ohne Störung. Hier interessiert aber die Änderung von a , wenn sich die Geschwindigkeit im Zeitintervall dt zusätzlich um dV als Folge der Störbeschleunigung geändert hat. Dabei kann $r = \text{const}$ gesetzt werden und die Differentiation von (36) liefert:

$$2V dV = \frac{\mu}{a^2} da.$$

Es ist aber:

$$V^2 = V_r^2 + V_\phi^2,$$

$$V dV = V_r dV_r + V_\phi dV_\phi = V_r \mathbf{R} dt + V_\phi \mathbf{S} dt.$$

Setzt man für V_r und V_ϕ die Ausdrücke (34) bzw. (35) ein, so gewinnt man nach Umformung:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\sqrt{\mu p}} \left(e \sin v \mathbf{R} + \frac{p}{r} \mathbf{S} \right).$$

Die Gleichung für $\frac{dp}{dt}$ läßt sich aus der Bedingung ableiten, daß der Ausdruck für den Flächensatz in jeder oskulierenden Ellipse in der Form $r^2 \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\mu p}$ gelten muß. Da $r \frac{d\theta}{dt} = V_\phi$ und $\frac{dV_\phi}{dt} = \mathbf{S}$ ist, folgt durch Differentiation:

$$r \mathbf{S} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{dp}{dt} \quad \text{oder:} \quad \frac{dp}{dt} = 2r \sqrt{\frac{p}{\mu}}.$$

Aus $p = a(1 - e^2)$ ist dann leicht die Gleichung für $\frac{de}{dt}$ abzuleiten.

Von den im Folgenden benötigten Gleichungen für die Variation der Elemente, wie sie in (39) bis (43) zusammengestellt sind, sollen hier nur noch die Ausdrücke für $\frac{di}{dt}$ und $\frac{d\Omega}{dt}$ abgeleitet werden. Im übrigen muß auf die Literaturangaben im Anhang (Moulton, Bauschinger, Stracke) verwiesen werden.

Die Lage der Bahnebene, d. h. i und Ω , wird nur durch die Beschleunigungskomponente \mathbf{W} geändert werden. Sie bewirkt ja, daß der Satellit eine Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu der durch r und V festgelegten Bahnebene erhält. Nach der Zeit dt ist die neue Bahnebene definiert durch die Resultante von V und $\mathbf{W} dt$. Man kann sich das Ergebnis als ein Kippen der ursprünglichen Ebene um den Radiusvektor r um den Winkel $d\epsilon$ vorstellen, wobei $d\epsilon$ zu berechnen ist aus:

$$d\varepsilon = \frac{W dt}{V_\phi} = \frac{r}{\sqrt{\mu p}} W dt \quad \left(\text{genau genommen ist } \tan \varepsilon = \frac{W dt}{V_\phi} \right).$$

Um den Einfluß dieser Drehung um $d\varepsilon$ auf i und Ω zu bestimmen,

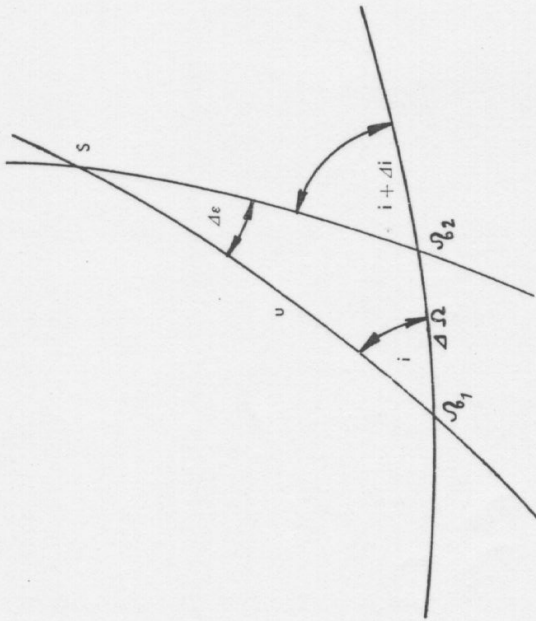


Fig. 29. Änderung von Knotenlage und Neigung bei Drehung der Bahnebene um den Radiusvektor als Folge einer Störbeschleunigung senkrecht zur Bahnebene.

betrachte man das sphärische Dreieck $\Omega_1 \Omega_2 S$ (Fig. 29), wo Ω_1 und Ω_2 die Lage des aufsteigenden Knotens zur Zeit t und $t + dt$ und S , wie früher, den Ort des Satelliten an der Sphäre bedeuten. Sinus-Satz und Kosinus-Satz der Winkel liefern:

$$\begin{aligned} \sin(i + di) \sin d\Omega &= \sin u \sin d\varepsilon, \\ \cos(i + di) &= \cos i \cos d\varepsilon - \sin i \cos u \sin d\varepsilon. \end{aligned}$$

Wegen der Kleinheit der Differentiale bleibt:

$$\begin{aligned} di &= \cos u d\varepsilon = \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cos u W dt, \\ \sin i d\Omega &= \sin u d\varepsilon = \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \sin u W dt. \end{aligned}$$

Die Gleichungen lassen sich qualitativ leicht anschaulich deuten. In Fig. (29) ist W positiv, d. h. von S nach links oben (= Nord) gerichtet, angenommen. Dabei müssen i und Ω zunehmen, wie es die Gleichungen

auch für $0^\circ < u < 90^\circ$ ergeben. Zeichnet man sich die Figur für $90^\circ < u < 180^\circ$, also im zweiten Quadranten, nachdem S seinen nördlichsten Bahnpunkt überschritten hat, dann erkennt man leicht, daß i abnimmt, Ω aber weiter zunimmt. Südlich des Äquators dreht sich alles um. Im Gravitationsfeld der abgeplatteten Erde ist z. B. (Fig. 33) W negativ, solange der Satellit nördlich und positiv, solange er südlich des Äquators ist. Die Folge ist eine periodische Änderung von i , so daß dieses nur kleine Schwankungen um einen Mittelwert ausführt, während Ω stets gleichsinnig variiert (der Knoten bzw. die Bahnebene drehen sich rückläufig; siehe 5.4).

Zusammenstellung der Gleichungen für die Änderung der Bahnelemente:

$$(39) \quad \frac{di}{dt} = \frac{r}{p} \cos u \tilde{W}$$

$$(40) \quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{p} \frac{\sin u}{\sin i} \tilde{W}$$

$$(41) \quad \frac{da}{dt} = \frac{2a}{1-e^2} \left[e \sin v \tilde{R} + \frac{p}{r} \tilde{S} \right]$$

$$(42) \quad \frac{de}{dt} = \tilde{R} \sin v + \left[e \frac{r}{p} + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos v \right] \tilde{S}$$

$$(43) \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{e} \tilde{R} \cos v + \frac{1}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \tilde{S} \sin v - \cos i \frac{d\Omega}{dt}.$$

In diesen Gleichungen, zu denen eigentlich auch noch die Gleichung für $\frac{dM_0}{dt}$, d. h. für die Änderung der mittleren Anomalie zur Epoche t_0 gehört,

ist zur Vereinfachung $\tilde{R}, \tilde{S}, \tilde{W}$ an Stelle von $\sqrt{\frac{p}{\mu}} R, \sqrt{\frac{p}{\mu}} S, \sqrt{\frac{p}{\mu}} W$

geschrieben. Die Integration dieser komplizierten Gleichungen, in denen bei der Anwendung auf einen speziellen Fall R, S und W noch als Funktionen des Ortes einzusetzen sind, kann streng nur simultan durch numerische Integration erfolgen, da auch die auf den rechten Seiten vorkommenden Bahnelemente von einem Integrationsschritt zum nächsten variieren. Allerdings ist die Änderung i. a. nur klein, so daß die Integrations Schritte groß genommen werden können (große zeitliche Intervalle). Ein weiterer Vorteil gegenüber der Integration der Differentialgleichungen für die Koordinaten ist die Tatsache, daß es sich nur um Differentialgleichungen 1. Ordnung handelt. Während eines kürzeren Zeitraums, etwa eines Umlaufs des Satelliten, kann man die Bahnelemente

mente auf der rechten Seite als Konstante behandeln; es gelingt dann u. U., die Gleichungen direkt zu integrieren.

In Gleichung (43) tritt ein Glied mit $\frac{d\Omega}{dt}$ auf. Das rührt daher, daß ω vom Knoten aus gezählt wird, die Komponente $d\Omega \cos i$ von $d\Omega$ in Bahnrichtung daher von der durch die Verlagerung des Perigäums in der Bahnebene allein bedingten Variation von ω in Abzug gebracht werden muß. (Siehe Fig. 29, wo z. B. der Abstand des Punktes S vom Ω durch die Drehung der Bahnebene um den Betrag $d\Omega \cos i$ verkleinert wird).

Statt die Beschleunigung durch die störenden Kräfte in die Komponenten \mathbf{R} und \mathbf{S} zu zerlegen, kann man sie auch in die Komponenten \mathbf{T} in Richtung der Tangente und \mathbf{N} in Richtung der Normalen zerlegen. Aus Fig. 30 liest man ab:

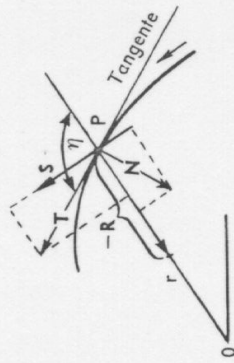


Fig. 30. Komponenten N und T einer Störbeschleunigung.

$$\mathbf{R} = \mathbf{T} \cos \eta - \mathbf{N} \sin \eta; \quad \mathbf{S} = \mathbf{T} \sin \eta + \mathbf{N} \cos \eta.$$

Nimmt man hier von vornherein im Hinblick auf den später zu behandelnden Einfluß des Luftwiderstandes, der fast nur in Richtung \mathbf{T} wirkt, $N = 0$ an, dann gehen die Gleichungen (41) und (42) nach einigen Umformungen unter Benutzung von (34) und (35) über in:

$$(44) \quad \frac{da}{dt} = \frac{2 a^2}{\mu} V T$$

$$(45) \quad \frac{de}{dt} = \frac{2 (\cos v + e)}{V} T.$$

Auch wenn man N nicht 0 gesetzt hätte, käme im Ausdruck für $\frac{da}{dt}$ kein Glied mit N vor; a wird nur von der Tangentialkomponente der störenden Kräfte beeinflusst.

KAPITEL V

STÖRUNGEN INFOLGE ABPLATTUNG DER ERDE

1. Das Gravitationsfeld der abgeplatteten Erde

Das Gravitationsfeld der Erde weicht von dem eines Massenpunktes ab; weder wird der einfache Newtonsche Ausdruck für die auf einen außerhalb liegenden Punkt wirkende Kraft $K = G \frac{M m}{r^2}$ gelten, noch wird diese stets nach dem Erdmittelpunkt gerichtet sein. Um einen allgemeineren Ausdruck für die Anziehungskraft zu gewinnen, ist es zweckmäßig, den Potentialbegriff zu benutzen. Wird ein Massenpunkt P von mehreren Massenpunkten P_i angezogen, so gilt für seine Beschleunigungskomponente in x -Richtung (Fig. 31):

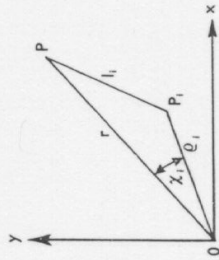


Fig. 31. Anziehung beliebig vieler Massenpunkte P_i auf P . Berechnung des Gravitationspotentials.

$$\ddot{x} = -G \sum_i m_i \frac{(x - x_i)}{l_i^3}.$$

wobei

$$l_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = r^2 + \rho_i^2 - 2 r \rho_i \cos \chi_i.$$

Führt man die Potentialfunktion:

$$U = G \sum \frac{m_i}{l_i}$$

ein, dann kann man einfach schreiben:

$$\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x},$$

und analog für die beiden anderen Koordinaten. U ist eine reine Ortsfunktion, falls die Konfiguration der Punkte P_i zeitlich unveränderlich ist und hat dann für jeden Raumpunkt P einen bestimmten, stets gleichen Wert. Alle Punkte mit gleichem U bilden eine Äquipotential- oder Niveaufläche. Die Beschleunigungskomponente in beliebiger Richtung ist gleich dem in dieser Richtung zu nehmenden partiellen Differentialquotienten von U .

Hat man keine diskreten Massenpunkte P_i , sondern, wie bei der Erde, einen Körper mit irgendeiner Massenverteilung im Innern, dann tritt an Stelle der Summe das Integral über den ganzen Körper:

$$(46) \quad U = G \int \frac{dm}{l} = G \int \frac{\sigma dv}{l};$$

dm = Massenelement, dv = Volumenelement, σ = Dichte.

Da die Massenverteilung im Erdinnern nicht bekannt ist und also σ als Funktion des Ortes nicht angegeben werden kann, muß man einen allgemeinen Ansatz für U suchen.

Entwickelt man

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 - 2 \frac{\rho}{r} \cos \chi \right]^{-2},$$

wobei jetzt ρ und r Abstände vom Erdmittelpunkt sind, nach Potenzen von $\frac{\rho}{r}$, so erhält man die Reihe:

$$(47) \quad \frac{1}{l} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\rho}{r} P_1 + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 P_2 + \dots \right],$$

wobei die Koeffizienten P_1, P_2, \dots Funktionen von χ sind (Legendresche Funktionen). Es ist:

$$(48) \quad \begin{aligned} P_1 &= \cos \chi \\ P_2 &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2 \chi = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \chi \\ P_3 &= \frac{3}{8} \cos \chi + \frac{5}{8} \cos 3 \chi = -\frac{3}{2} \cos \chi + \frac{5}{2} \cos^3 \chi \\ &\dots \end{aligned}$$

Zur Ableitung setze man $\cos \chi = \frac{1}{2} (e^{i\chi} + e^{-i\chi})$. Dann ist:

$$\left[1 + \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 - 2 \frac{\rho}{r} \cos \chi \right]^{-2} = \left(1 - \frac{\rho}{r} \cdot e^{i\chi} \right)^{-2} \left(1 - \frac{\rho}{r} \cdot e^{-i\chi} \right)^{-2}.$$

Entwickelt man beide Klammern nach dem binomischen Lehrsatz, multipliziert aus und beachtet, daß $e^{ni\chi} + e^{-ni\chi} = 2 \cdot \cos(n\chi)$ ist, dann kommt man zu den Ausdrücken (48).

Die Potentialfunktion U schreibt sich nun:

$$(49) \quad U = \frac{G}{r} \left[\int dm + \int \frac{\rho}{r} P_1 dm + \int \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 P_2 dm + \int \left(\frac{\rho}{r} \right)^3 P_3 dm + \dots \right].$$

wobei die Integrale über die ganze Erde zu nehmen sind. Das erste Integral gibt einfach die ganze Erdmasse M . Um die beiden nächsten auswerten zu können, führen wir ein äquatoriales Koordinatensystem ein mit der Äquatorebene als x - y -Ebene und der Rotationsachse als z -Achse. Die $+x$ -Achse soll nach dem Meridian von Greenwich gerichtet sein. Das Massenelement dm habe die Koordinaten x, y, z bzw. ρ, λ, β , der Punkt P x', y', z' , bzw. r, λ', β' (siehe 1.2). Dann gilt:

$$(50) \quad \cos \chi = \frac{xx' + yy' + zz'}{r\rho} = \sin \beta \sin \beta' + \cos \beta \cos \beta' \cos (\lambda - \lambda').$$

Das zweite Integral schreibt sich damit:

$$\int \frac{\rho}{r} P_1 dm = \int \frac{\rho}{r} \cos \chi dm = \frac{1}{r^2} \left[x' \int x dm + y' \int y dm + z' \int z dm \right].$$

Falls der Erdmittelpunkt, den wir als 0-Punkt gewählt haben, auch Massenmittelpunkt der Erde ist und das wollen wir voraussetzen, dann verschwinden alle 3 Integrale, da die x -Koordinate X des Schwerpunktes definiert ist durch $MX = \int x dm$.

Weiter hat man:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{\rho}{r} \right)^2 P_2 dm &= \frac{1}{2r^2} \int (3 \cos^2 \chi - 1) \rho^2 dm = \\ &= \frac{1}{2r^4} \int [3 (xx' + yy' + zz')^2 - r^2 \rho^2] dm. \end{aligned}$$

Der Integrand läßt sich, nach einigen Umformungen, aufspalten in:

$$x'^2 (2x^2 - y^2 - z^2) + y'^2 (2y^2 - x^2 - z^2) + z'^2 (2z^2 - x^2 - y^2) + 6x'y'xy + 6x'z'xz + 6y'z'yz.$$

Nun gilt, wenn man mit A, B, C die Trägheitsmomente der Erde in bezug auf die x -, y - bzw. z -Achse bezeichnet:

$$\begin{aligned} A &= \int (y^2 + z^2) dm \\ B &= \int (x^2 + z^2) dm \\ C &= \int (x^2 + y^2) dm. \end{aligned}$$

so daß die Integration über die ersten 3 Summanden gibt:

$$x^2(B + C - 2A) + y^2(C + A - 2B) + z^2(A + B - 2C).$$

Wir machen nun hier und auch für das Folgende die weitere vereinfachende Annahme, daß die Dichteverteilung im Erdinnern radial-symmetrisch zur z -Achse (d. h. rotations-symmetrisch) ist. Die Dichte soll also nur von ϱ und β , nicht aber von λ abhängen. Diese Annahme entspricht sicher weitgehend den Tatsachen, ganz richtig ist sie bestimmt nicht. Abgesehen von lokalen Dichteschwankungen in Abhängigkeit von λ , zeigen ja gerade die am Ende von 1.1 erwähnten Ergebnisse von Satellitenbeobachtungen, daß der Äquator nicht genau rotations-symmetrisch ist.

Mit dieser Annahme wird $A = B$. Schreibt man statt B einfach A , dann wird das Integral über die ersten 3 Summanden:

$$(x^2 + y^2 - 2z^2)(C - A).$$

In Polarkoordinaten:

$$(51) \quad x^2 + y^2 - 2z^2 = r^2(1 - 3 \sin^2 \beta).$$

Die Integrale über die doppelten Produkte, z. B. $\int xy dm$, verschwinden. In der Mechanik wird gezeigt, daß jeder Körper drei zueinander senkrechte Hauptträgheitsachsen besitzt, von denen die eine die Achse des größten, eine der andern die Achse des kleinsten überhaupt möglichen Trägheitsmoments ist, ferner, daß eben die Integrale dieser Art verschwinden, wenn man diese Achsen als Koordinatenachsen wählt. Mit dem Verschwinden dieser, auch Deviations- oder Zentrifugal-Momente genannten Integrale hängt es zusammen, daß bei einer kräftefreien Rotation des Körpers die Rotationsachse nur dann ihre Lage im Körper nicht verändert, wenn sie mit einer der Hauptträgheitsachsen zusammenfällt. Nun ist aber unsere z -Achse die Achse des größten Trägheitsmoments der Erde; wäre sie das nicht, dann müßte sie sich als Rotationsachse im Erdkörper verlagern. Jeder Äquatordurchmesser ist wegen der Rotations-symmetrie eine Achse kleinsten Trägheitsmoments, so daß die Integrale über die Produkte, wie oben behauptet, verschwinden müssen. Zusammenfassend bis zum Glied mit P_2 :

$$(52) \quad U = \frac{GM}{r} + \frac{G}{2r^3}(C - A)(1 - 3 \sin^2 \beta) = \frac{\mu}{r} \left[1 + \frac{1}{2r^2} \frac{C - A}{M} (1 - 3 \sin^2 \beta) \right],$$

wobei, wie früher, $GM = \mu$ gesetzt und der Indexstrich bei β weglassen wurde.

Für die folgenden Glieder, also $\int \varrho^3 P_3 dm$, $\int \varrho^4 P_4 dm$, ..., gibt es keine so anschauliche Deutung mehr. Generell sind die P_n Funktionen von β , β' und $(\lambda - \lambda')$ [siehe (48) und (50)]. Wegen der angenommenen Rotations-symmetrie spielt aber die λ -Abhängigkeit keine Rolle; die Glieder mit λ fallen bei der Integration weg. Es läßt sich weiter zeigen, daß die von λ freien Glieder als Produkte zweier gleicher Funktionen von β bzw. β' in der Form $F_n(\beta) \cdot F_n(\beta')$ geschrieben werden können, so daß bei der Integration der Faktor $F_n(\beta')$ vor das Integral tritt und nur $\int \varrho^n F_n(\beta) dm$ bleibt. Es soll dies am Beispiel von P_2 bewiesen werden: setzt man in $P_2 = \frac{3}{2} \cos^2 \chi - \frac{1}{2}$ den Ausdruck (50) für $\cos \chi$ ein und formt das Glied mit

$\cos^2(\lambda - \lambda')$ mit Hilfe der Identität $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ um, dann

folgt:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \sin^2 \beta \sin^2 \beta' + \frac{3}{4} \cos^2 \beta \cos^2 \beta' + \frac{3}{4} \cos^2 \beta \cos^2 \beta' \cos 2(\lambda - \lambda') + \\ + 3 \sin \beta \cos \beta \sin \beta' \cos \beta' \cos(\lambda - \lambda') - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Da, wie angenommen, die Dichte nur von ϱ und β abhängen soll, kann bei der Integration über die ganze Erde, wobei ja das Massenelement dm ersetzt wird durch $\sigma dv = \varrho^2 \cos \beta d\varrho d\beta d\lambda$, die Integration über λ von 0 bis 2π ausgeführt werden, wobei die Glieder mit $(\lambda - \lambda')$ und Vielfachen davon verschwinden. Die verbleibenden Glieder lassen sich umformen in:

$$\begin{aligned} \frac{9}{4} \sin^2 \beta \sin^2 \beta' - \frac{3}{4} \sin^2 \beta - \frac{3}{4} \sin^2 \beta' + \frac{1}{4} = \\ = \frac{3}{2} \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{3} \right) \times \frac{3}{2} \left(\sin^2 \beta' - \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

so daß also $F_2(\beta) = \frac{3}{2} \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{3} \right)$ ist.

Beim Vergleich mit (48) erkennt man eine interessante Eigenschaft der Funktionen P_n : die von $(\lambda - \lambda')$ und von Vielfachen dieses Winkels freien Glieder in P_n ($\cos \chi$) spalten in Produkte $P_n(\sin \beta) \cdot P_n(\sin \beta')$ auf.

Im Endergebnis kann man den Ausdruck für U bis zum Glied mit P_4 in der Form schreiben:

$$(53) \quad U = \frac{\mu}{r} \left[1 + \frac{J}{3} \left(\frac{R}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \beta) + \frac{H}{5} \left(\frac{R}{r} \right)^3 (3 - 5 \sin^2 \beta) \sin \beta + \frac{K}{30} \left(\frac{R}{r} \right)^4 (3 - 30 \sin^2 \beta + 35 \sin^4 \beta) \right].$$

Die Indexstriche bei β bleiben weg; β bezieht sich jetzt auf den Punkt P . Die Koeffizienten J , H und K sind, von Zahlenfaktoren abgesehen, die über die ganze Erde genommenen Integrale $\int \left(\frac{\rho}{R} \right)^n F_n(\beta) dm$, für $n = 2, 3$ und 4 ; R = Äquatorradius der Erde. Wegen unserer Unkenntnis über die Dichteverteilung im Erdinnern müssen diese Koeffizienten aus Beobachtungen empirisch bestimmt werden. Der erste, wichtigste Koeffizient J ist nach dem Früheren:

$$J = \frac{3}{2} \frac{C - A}{R^2 M}.$$

Man kann heute folgende, aus Beobachtungen künstlicher Satelliten hergeleitete Werte annehmen:

$$\begin{aligned} J &= 1623.4 \cdot 10^{-6} \\ H &= -6.0 \cdot 10^{-6} \\ K &= 6.4 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Statt dieser Koeffizienten werden in der Literatur häufig auch andere benutzt, die bestimmte Vielfache der hier benutzten sind, z. B.:

$$J_2 = \frac{2}{3} J; \quad J_3 = \frac{2}{5} H; \quad J_4 = -\frac{8}{30} K.$$

Die Entwicklung (53) ist eine Entwicklung nach zonalen Kugelfunktionen („zonal harmonics“), zonal deswegen, weil nur die Abhängigkeit von β , nicht aber von λ berücksichtigt ist. Die Glieder mit J , H , K heißen auch zweite, dritte bzw. vierte Harmonische*.

Wie man sieht, ist J etwa um den Faktor 250 größer als die beiden andern Koeffizienten.

Die Sinusfunktionen im 2. und 4. Glied sind quadratisch, also symmetrisch zum Äquator. Nicht so das 3. Glied; findet man für H einen von 0 verschiedenen Wert, so bedeutet dies eine Unsymmetrie in der Massenverteilung.

* Zusatz bei der Korrektur: neuerdings werden fast ausschließlich die Koeffizienten $J_2, J_3, J_4 \dots$ benutzt, womit sich U unter Beachtung des oben über die Funktionen P_n Gesagten, schreibt:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin \beta) \right].$$

verteilung zwischen nördlicher und südlicher Halbkugel. Satellitenbeobachtungen haben einen solchen Effekt eindeutig erkennen lassen. Siehe 5.6.

Im Folgenden soll nur das J -Glied beibehalten werden. Dann schreibt sich U :

$$(54) \quad U = \frac{\mu}{r} \left[1 + \frac{J}{3} \left(\frac{R}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \beta) \right].$$

Setzt man $U = U_0 = \text{const}$ und löst nach r auf, dann erhält man die Gleichung für die Äquipotentialfläche U_0 :

$$(55) \quad r = \frac{\mu}{U_0} \left[1 + \frac{J}{3} R^2 \left(\frac{U_0}{\mu} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \beta) \right] = C_1 - C_2 \sin^2 \beta,$$

wobei in dem Glied mit J in Näherung $r = \frac{\mu}{U_0}$ gesetzt ist. Da $C_2 \ll C_1$, stellt (55), wie durch Vergleich mit (1) zu erkennen, die Polargleichung einer Ellipse mit geringer Exzentrizität dar (Pol = Mittelpunkt). Die Flächen $U = \text{const}$ sind also in Näherung abgeplattete Rotationsellipsoide (man bezeichnet sie auch als Niveau-Sphäroide). Ihre Abplattung ist $\alpha \approx J \left(\frac{R}{r} \right)^2$, wobei r hier als Mittelwert von r für die Fläche U_0 steht.

Wie zu erwarten, wird α nach außen rasch kleiner – die Niveauflächen nähern sich einer Kugel.

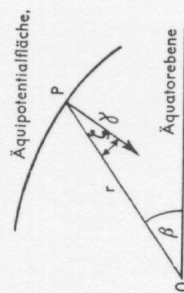


Fig. 32. Fläche gleichen Gravitationspotentials und Vektor γ der Gravitationsbeschleunigung. Bei rotationsymmetrischem Potential ist die Papierebene die Meridianebene von P .

Die Gravitationsbeschleunigung γ als Funktion von r und β erhält man durch Differentiation von U in Richtung der Normalen zur Niveaufläche. Da sich diese wegen der geringen Abplattung der Niveauflächen nur wenig von der Richtung von r unterscheidet, kann man die Größe von γ auch durch Differentiation von U nach r erhalten:

len schließlich noch den Verlauf von $\gamma(r)$ in den Richtungen $\beta = 0^\circ$, $\beta = 35:3$ und $\beta = 90^\circ$ dar, wobei die Kurven links jeweils an der Erdoberfläche beginnen, d. h. für $\beta = 90^\circ$ z. B. bei $r =$ Polradius der Erde.

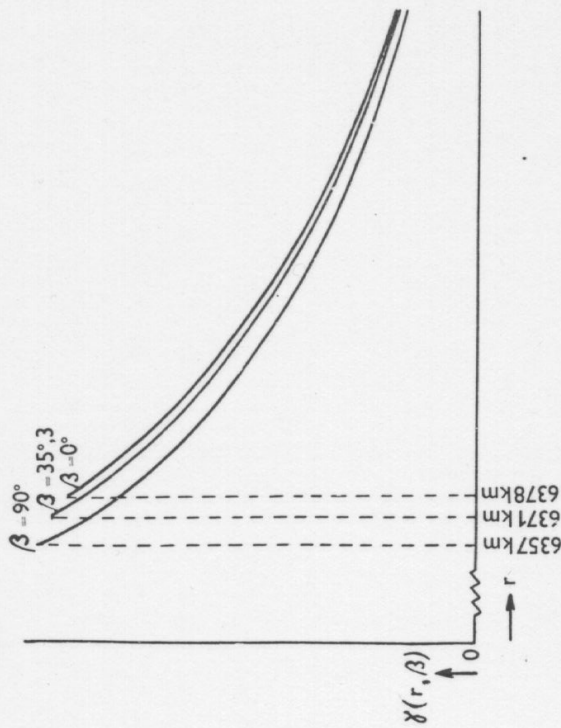


Fig. 34. Schematische Darstellung des Verlaufs der Gravitationsbeschleunigung als Funktion des Abstands r vom Erdmittelpunkt und der geozentrischen Breite β für $\beta = 0^\circ, 35:3$ und 90° . Unterschiede stark übertrieben.

Auch diese Figur ist nicht maßstäblich gezeichnet, weil sonst die Unterschiede wegen ihrer Kleinheit nicht klar zum Ausdruck kämen. Sie soll im wesentlichen zeigen, daß γ bei gleichem r für Werte $|\beta| < 35:3$ größer ist als für $|\beta| > 35:3$, aber rascher nach außen abnimmt, als dem quadratischen Abstandsgesetz entspricht. Dieses gilt nur in Richtung $\beta = \pm 35:3$. Wenn auch diese Unterschiede nur gering sind, so haben sie doch einen großen Einfluß auf die Bahnen erdnaher Satelliten.

Zuletzt sei noch auf einen interessanten Zusammenhang zwischen der Konstanten J und der Abplattung der Erdoberfläche hingewiesen. Die Erdoberfläche ist ebenfalls eine Äquipotentialfläche, aber keine aus der Schär der oben behandelten Flächen $U = \text{const}$. Deren Abplattungen gelten daher nicht für die Erdoberfläche, ebensowenig wie die Winkel ζ an der Erdoberfläche übergehen in die Differenz $(\varphi - \beta)$ zwischen geographischer und geozentrischer Breite. Vielmehr spielt bei der Form der Erdoberfläche die Zentrifugalbeschleunigung $Z = \omega^2 r \cos \beta$ ($\omega =$ Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation) eine Rolle. Deren Potential ist $U_z =$

V. Störungen infolge Abplattung der Erde

$$(56) \quad \gamma(r, \beta) \approx \frac{\partial U}{\partial r} \approx -\frac{\mu}{r^2} \left[1 + J \left(\frac{R}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \beta) \right].$$

Das erste Glied ist die Beschleunigung für die Erde als Massenpunkt, das zweite das Hauptglied der durch die Erdabplattung bedingten Abweichung hiervon, das für $\beta = \pm 35:16'$ Null ist (vgl. 1.1). Für kleinere Werte $|\beta|$ ist $|\gamma|$ größer, für größere Werte $|\beta|$ ist $|\gamma|$ kleiner als die der Entfernung r entsprechende Beschleunigung durch eine kugelförmige Erde.

Um die Abweichung der Richtung von γ gegenüber der von r , d. h. den Winkel ζ in Fig. 32 zu berechnen, beachte man: $\tan \zeta = \frac{dr}{r d\beta}$ (vgl. 3. 6).

Man erhält aus (55) unter Vernachlässigung kleiner Größen von der Ordnung J^2 :

$$(57) \quad \tan \zeta = -J \left(\frac{R}{r} \right)^2 \sin 2\beta.$$

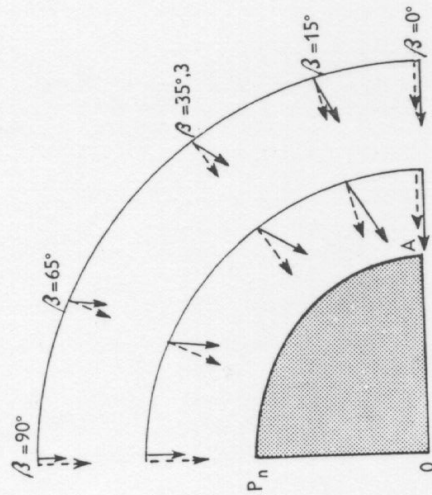


Fig. 33. Schematische Darstellung des Unterschieds (stark übertrieben) zwischen den Vektoren der Gravitationsbeschleunigung für die Erde als Massenpunkt (gestrichelt) und für die abgeplattete Erde (ausgezogen).

Fig. 33 gibt eine schematische Darstellung der Größe und Richtung von γ in einer Meridianebene, wobei ausgezogene Pfeile die tatsächlichen, gestrichelte Pfeile die für eine kugelförmige Erde gültigen Beschleunigungsvektoren darstellen sollen. Die Unterschiede sind sowohl nach Größe als auch Richtung stark übertrieben. Die 3 Kurven in Fig. 34 stel-

$\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \beta$. Zusammen mit dem Potentialausdruck (54) für das reine Gravitationspotential lautet daher die Formel für das Potential in einem mit der Erde rotierenden Punkt:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 + \frac{J}{3} \left(\frac{R}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \beta) + \frac{\omega^2 r^3}{2\mu} \cos^2 \beta \right].$$

In der Nähe der Erdoberfläche kann man in den kleinen Gliedern der rechten Seite $r = R$ setzen und erhält – ebenfalls unter Vernachlässigung kleiner Größen – für die Polargebung einer nahe der Erdoberfläche verlaufenden Äquipotentialfläche U_0 :

$$r = \frac{\mu}{U_0} \left[1 + \frac{J}{3} (1 - 3 \sin^2 \beta) + \frac{\omega^2 R^3}{2\mu} \cos^2 \beta \right].$$

Ihre Abplattung, zu berechnen aus der Differenz für $\beta = 0^\circ$ und $\beta = 90^\circ$ (siehe 1.1), ist:

$$a = J + \frac{\omega^2 R^3}{2\mu}.$$

Führt man im 2. Glied der rechten Seite noch ein: Gravitationsbeschleunigung am Äquator $\gamma_a = \frac{\mu}{R^2}$,

Zentrifugalbeschleunigung am Äquator $Z_a = \omega^2 R$, dann folgt:

$$(58) \quad a = J + \frac{1}{2} \frac{Z_a}{\gamma_a};$$

γ_a und Z_a sind dabei absolut genommen.

In Zahlenwerten:
 $\mu = 398\,600 \text{ km}^3/\text{sec}^2$
 $R = 6\,378.2 \text{ km}$
 $\omega = \frac{2\pi}{86\,164} = 7.29 \cdot 10^{-5} / \text{sec}.$

Daraus:
 $\gamma_a = 979.8 \text{ cm/sec}^2$
 $Z_a = 3.39 \text{ cm/sec}^2$ } $\frac{1}{2} \frac{Z_a}{\gamma_a} = 0.00173.$

Addiert man hierzu den aus Satellitenbeobachtungen bestimmten Wert $J = 0.00162$, dann erhält man:

$$a = 0.00335 = \frac{1}{298}.$$

Das ist aber gerade die Abplattung der Erdoberfläche, wie es sein muß, wenn diese eine Äquipotentialfläche ist. Gleichung (58) erlaubt, a zu berechnen, wenn J aus Satellitenbeobachtungen bestimmt ist. Aus (58) läßt sich folgende Gleichung, die unter dem Namen Clairautsches Theorem bekannt ist, ableiten:

$$a + \frac{q_p}{g_a} = \frac{5}{2} \frac{Z_a}{g_a}.$$

* Genau wäre γ_a aus (56) zu berechnen. Man erhält dann $\gamma_a = 981.4 \text{ cm/sec}^2$, doch ist der Unterschied für die Berechnung von a belanglos.

Hier ist $g_a = \gamma_a - Z_a =$ Schwerebeschleunigung am Äquator, $g_p = \gamma_p =$ Schwerebeschleunigung am Pol. Die Werte γ_a und γ_p sind aus (56) für $r = R$, $\beta = 0^\circ$ bzw. $r = R$ ($1 - a$), $\beta = 90^\circ$ herzuleiten (und dabei positiv zu nehmen). Bei der mathematischen Umformung wird $a^2 = 0$ gesetzt. Wegen verschiedener Vernachlässigungen bei der Ableitung ist das Theorem in der angeschriebenen Form nicht ganz streng.

2. Die Differentialgleichungen der Bewegung im Gravitationsfeld der abgeplatteten Erde

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit der Äquatorebene als x - y -Ebene, wobei die Richtung der x -Achse wegen der angenommenen axialen Symmetrie des Feldes beliebig ist und der Rotationsachse der Erde (nach Nord) als z -Achse schreibt sich (54), wenn man $\sin \beta = \frac{z}{r}$ einführt:

$$(59) \quad U = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu J}{3 r^3} \left(1 - 3 \frac{z^2}{r^2} \right).$$

Differentiation nach x, y, z liefert die drei Beschleunigungskomponenten:

$$(60) \quad \begin{aligned} \ddot{x} &= -\mu \frac{x}{r^3} - \mu J \frac{R^2}{r^5} \frac{x}{r^2} \left(1 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) \\ \ddot{y} &= -\mu \frac{y}{r^3} - \mu J \frac{R^2}{r^5} \frac{y}{r^2} \left(1 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right) \\ \ddot{z} &= -\mu \frac{z}{r^3} - \mu J \frac{R^2}{r^5} \frac{z}{r^2} \left(3 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind das Analogon zu den Gleichungen (24) des einfachen 2-Körper-Problems.

Man leitet aus ihnen sofort ein Integral ab. Es ist:

$$\begin{aligned} xy - y\dot{x} &= 0 \\ xy - y\dot{x} &= \text{const.} \end{aligned}$$

Das ist aber der Flächensatz für die Projektion des Radiusvektor auf die Äquatorebene. Für die Projektion in die anderen Ebenen gilt der Satz nicht, also auch nicht in der Bahnebene. Außerdem existiert nur noch das Energie-Integral, wie man aus ganz allgemeinen Überlegungen schließen kann. Die Gravitationskraft der Erde, die ja hier allein betrachtet wird, ist eine konservative Kraft, die ein Potential besitzt. In diesem Falle gilt aber:

$$\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \dot{z}\dot{z} = \frac{\partial U}{\partial t} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \frac{dU}{dt},$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} \frac{d(V^2)}{dt} = \frac{dU}{dt},$$

$$\frac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2) = U_2 - U_1.$$

Multipliziert man mit der Satellitenmasse, dann steht links die Differenz der kinetischen Energie zu zwei verschiedenen Zeiten, rechts der Unterschied der potentiellen Energie zwischen den Niveauflächen U_1 und U_2 , die der Satellit zu diesen Zeiten kreuzte.

Der Flächensatz für die Projektion in die Äquatorebene gilt allgemein für einen rotationssymmetrischen Potentialausdruck. Der Energiesatz gilt natürlich nicht mehr, wenn der Luftwiderstand mit einbezogen wird. Im Folgenden werden die Gleichungen (60) nicht weiter diskutiert; der Einfluß der Erdabplattung wird vielmehr nach der Methode der „Störungen in den Elementen“ behandelt, die einen Einblick in die Änderung der Bahnelemente gestattet.

3. Zerlegung der störenden Kraft in Komponenten

Um die Änderung der Elemente nach (39) bis (43) berechnen zu können, muß man erst die Komponenten R , S und W der Störbeschleunigung durch Differentiation des „Störanteils“ im Ausdruck (54) bzw. (59), nämlich

$$(61) \quad U' = \frac{\mu J R^2}{3 r^3} \left(1 - 3 \frac{z^2}{r^2} \right) = \frac{\mu J R^2}{3 r^3} (1 - 3 \sin^2 \beta),$$

berechnen.

Formal mathematisch leitet man zunächst am einfachsten die Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen ab:

$$B_x = \kappa \frac{x}{r^5} (5 \sin^2 \beta - 1)$$

$$B_y = \kappa \frac{y}{r^5} (5 \sin^2 \beta - 1) \quad \kappa = \mu J R^2$$

$$B_z = \kappa \frac{z}{r^5} (5 \sin^2 \beta - 3).$$

Der Übergang zu R , S , W vollzieht sich dann nach den üblichen Transformationsformeln, z. B.:

$$R = B_x \cos(\widehat{R}x) + B_y \cos(\widehat{R}y) + B_z \cos(\widehat{R}z),$$

wobei die Ausdrücke für die Richtungskosinus, abgeleitet aus den sphärischen Dreiecken der Fig. 35, dem nachstehenden Schema zu entnehmen sind (P_n = Himmelspol, P_B = Bahnpol, + x -Achse in Richtung Ω).

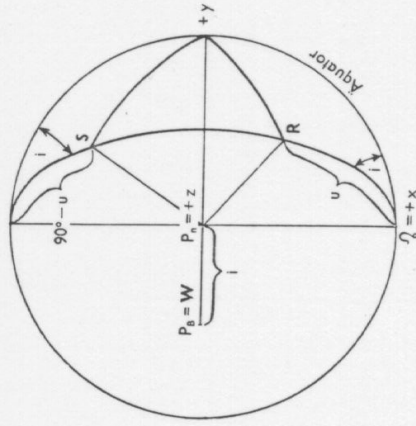


Fig. 35. Zur Ableitung der Gleichungen für die Komponenten der Störbeschleunigung.

	x	y	z
R	$\cos u$	$\sin u \cos i$	$\sin u \sin i$
S	$-\sin u$	$\cos u \cos i$	$\cos u \sin i$
W	0	$-\sin i$	$\cos i$

Beachtet man noch, daß z. B. $\frac{x}{r} = \cos(\widehat{rx}) = \cos(\widehat{R}x) \dots$ und $\sin \beta = \sin u \sin i$, dann erhält man nach Einsetzen und Umformung:

$$(62) \quad R = \frac{\kappa}{r^4} (3 \sin^2 i \sin^2 u - 1)$$

$$(63) \quad S = -\frac{\kappa}{r^4} \sin^2 i \sin 2u$$

$$(64) \quad W = -\frac{\kappa}{r^4} \sin 2i \sin u.$$

Wegen des Faktors $\frac{1}{r^4}$ nimmt der störende Einfluß der Erdabplattung mit wachsender Distanz rasch ab.

Die Gleichung für R kann man auch direkt gewinnen aus (61), da $R = \frac{\partial U'}{\partial r}$. Auch die Gleichungen für S und W kann man leicht weniger formal aus den Ergebnissen von 5.1 über Größe und Richtung der Gravitationsbeschleunigung ableiten.

4. Die Drehung (Präzession) der Bahnebene

Bei der Besprechung der Änderungen, die die Bahnelemente infolge der Erdabplattung erfahren, soll mit der Änderung von Ω begonnen werden. Setzt man in (40) den Ausdruck (64) ein, dann erhält man:

$$(65) \quad \frac{d\Omega}{dt} = -2 \int \frac{\mu J R^2 \cos i \sin^2 u}{p}$$

Zur Integration müßten u und r als Funktionen von t nach den Gleichungen des 2-Körper-Problems eingesetzt werden, was aber bekanntlich nicht möglich ist. Man kann aber mit Hilfe des Flächensatzes $r^2 \frac{du}{dt} = \sqrt{\mu p}$ die unabhängige Variable t ersetzen durch u . Der Flächensatz gilt allerdings in dieser Form nicht mehr streng, da ja nun die Knotenrichtung, von der aus u gerechnet wird, nicht mehr raumfest ist*. Die dadurch begangenen Vernachlässigungen sind nur von der Ordnung J^2 .

Setzt man außerdem: $r = \frac{p}{1 + e \cos(u - \omega)}$,

dann erhält man den integrierbaren Ausdruck:

$$(66) \quad \frac{d\Omega}{du} = -\frac{2}{p^2} J R^2 \cos i \sin^2 u [1 + e \cos(u - \omega)].$$

Auf der rechten Seite können die Bahnelemente p, i, e und ω konstant angenommen werden, solange es sich nicht um eine Integration über längere Zeit handelt. Wegen des Minuszeichens nimmt Ω stets ab, die Bahnebene dreht sich in einer der Bewegung des Satelliten entgegengesetzten Richtung, sie führt eine „Präzessionsbewegung“ aus. Die Geschwindigkeit dieser Drehung ist allerdings während eines Umlaufs nicht konstant (vgl. damit auch die in 4.2 angestellten Betrachtungen). Integriert man über einen vollen Umlauf, dann hat man zunächst

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 u \, du = \pi \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 u \cos(u - \omega) \, du = 0.$$

Es bleibt also für die Änderung pro Umlauf:

$$(67) \quad \frac{\Delta\Omega}{\text{Umlauf}} = -2\pi J \left(\frac{R}{p}\right)^2 \cos i.$$

Um von hier auf die Änderung pro Tag überzugehen, beachte man, daß

* Im ungestörten Fall ist $du = dv = d\theta$; im gestörten Fall unterscheiden sich diese Differentiale um Größen von der Ordnung $J \cdot dt$. Es ist z. B.: $du = d\theta - \cos i \, d\Omega$.

die Umlaufzeit nach dem 3. Keplerschen Gesetz $U = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^2$ ist und die Zahl der Umläufe pro Tag $N = 86400 \cdot \frac{\sqrt{\mu}}{2\pi} a^{-2}$. Geht man noch auf Grad über und setzt für μ, R und J ihre Zahlenwerte ein ($\sqrt{\mu} = 631.3 \text{ km}^2 \text{ sec}^{-1}$):

$$(68) \quad \frac{\Delta\Omega}{\text{Tag}} = -\frac{10^{\circ}0}{\left(\frac{a}{R}\right)^{7/2} (1 - e^2)^2} \cos i.$$

Änderungen, die, wie diese, zeitlich stets in gleichem Sinne erfolgen, heißen säkulare Änderungen (Störungen) im Gegensatz zu solchen periodischer Natur. Speziell nennt man Störungen mit Perioden von der Dauer eines ganzen oder halben Umlaufs kurzperiodische Störungen.

Im Falle von Ω überlagert sich der säkularen Störung nach (68) im wesentlichen eine solche von der Periode $\frac{1}{2} U$, wie man erkennt, wenn man das allgemeine Integral von (66) für $e = 0$ bildet. Es ist ja $\int \sin^2 u \, du = \frac{1}{2} u - \frac{1}{4} \sin 2u$, wobei das Glied $\frac{1}{2} u$ der säkularen, das Glied mit $\sin 2u$ der kurzperiodischen Störung entspricht. Für $e \neq 0$ kommen noch weitere kurzperiodische Glieder hinzu (siehe auch 5.6).

Als Beispiel für (68) mögen die Werte für Sputnik II und Explorer VII dienen. Bei Sputnik II waren die Bahnelemente für die beiden ersten Monate nach dem Start: $\frac{a}{R} = 1.130, e = 0.09, i = 65^{\circ}.3$. Damit errechnet

man $\frac{\Delta\Omega}{\text{Tag}} = -2^{\circ}.77$ gegenüber einem beobachteten Wert von $-2^{\circ}.72$ in diesem Zeitraum. Mit den in 2.7 angegebenen Elementen von Explorer VII rechnet man $\frac{\Delta\Omega}{\text{Tag}} = -4^{\circ}.27$ gegenüber dem angegebenen Wert

$-4^{\circ}.21$. Gerade die Beobachtung von $\Delta\Omega$ liefert ein ausgezeichnetes Mittel zur Bestimmung der Konstanten im Ausdruck (53) für das Gravitationsfeld der Erde.

Die Bahnebene eines nahe der Erdoberfläche mit kleiner Neigung i umlaufenden Satelliten würde bereits in 36d einen vollen Umlauf ausführen, während eine Polbahn stationär ist, was auch verständlich ist. Wegen der

6 Bohrmann, Bahnen künstlicher Satelliten

durch den Luftwiderstand bedingten Abnahme von a wächst $\frac{\Delta\Omega}{\text{Tag}}$ im Laufe der Zeit.

Die Drehung der Bahnebene hat zur Folge, daß die Bahn selbst eine komplizierte Raumkurve wird, besonders da sich ja der säkularen, fortschreitenden Drehung nach (67) noch kurzperiodische Schwankungen überlagern.

Führt man dieselben Entwicklungen für i durch, indem man (64) in (39) einsetzt und mit Hilfe des Flächensatzes von dt auf du übergeht, dann erhält man:

$$(69) \quad \frac{di}{du} = -\frac{1}{2} J \left(\frac{R}{p}\right)^2 \sin 2i \sin 2u [1 + e \cos(u - \omega)].$$

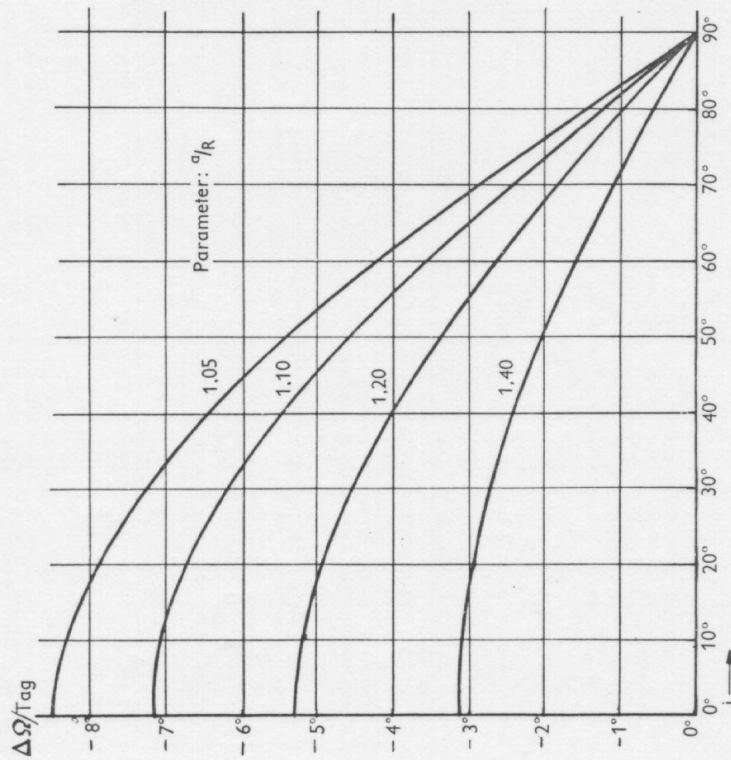


Fig. 36. Diagramm zur Bestimmung der Drehung (Präzession) der Bahnebene infolge der Erdabplattung als Funktion der Bahnneigung und des mittleren Abstands. Das Minuszeichen gilt für den Normalfall einer Bewegung des Satelliten in Richtung West-Ost.

Das Integral über einen ganzen Umlauf wird hier aber Null, d. h. die Neigung erfährt keine säkularen Änderungen, sondern nur periodische mit der Periode $\frac{U}{2}$. Wegen der Kleinheit von J erreichen solche periodischen Störungen meist nur geringe Ausmaße und brauchen nur bei genauen Rechnungen berücksichtigt zu werden; bei i erreicht die Amplitude maximal für $i = 45^\circ$ rund 2 Bogenminuten.

In Fig. 36 sind für 4 Werte $\frac{a}{R}$ die Kurven $\frac{\Delta\Omega}{\text{Tag}}$ als Funktion von i gezeichnet, wobei $e = 0$ angenommen ist.

5. Die Drehung der Bahnellipse

Eine starke säkulare Störung erleidet die Richtung der großen Achse der Ellipse in der Bahnebene, d. h. die Lage des Perigäums, also das Element ω . Läßt man in (43) zunächst das Glied $-\frac{d\Omega}{dt} \cos i$ weg, setzt die Ausdrücke für \mathbf{R} und \mathbf{S} aus (62) bzw. (63) ein und benutzt wieder den Flächensatz, so gelangt man zu der etwas unbequemeren Gleichung (wobei $dw + d\Omega \cos i = dw'$ gesetzt ist):

$$(70) \quad -e \frac{d\omega'}{du} = J \left(\frac{R}{p}\right)^2 [(3 \sin^2 i \sin^2 u - 1) (1 + e \cos v)^2 \cos v + \sin^2 i \sin 2u \sin v (2 + 3e \cos v + e^2 \cos^2 v)].$$

Zu ihrer Integration ist Folgendes zu sagen: mit Hilfe der Gleichung $u = v + \omega$ kann man statt u überall v als Variable einführen. Entwickelt man ferner $\sin(v + \omega)$ und $\cos(v + \omega)$ und multipliziert aus, dann kommt man nach geeigneten Umformungen zu Integralen der Form:

$$F(m, n) = \int_0^{2\pi} (\sin v)^m (\cos v)^n dv.$$

Diese Integrale sind 0, wenn einer der Exponenten ungerade ist. Für gerade m und n ist $F(m, n) = F(n, m)$, und zwar ist: $F(2, 0) = \pi$; $F(4, 0) = \frac{3}{4} \cdot \pi$ und $F(2, 2) = \frac{1}{4} \cdot \pi$. Führt man die Integration von (70) Glied für Glied durch, so bleiben nur Glieder, die e als Faktor enthalten, übrig, so daß e überhaupt aus der Gleichung verschwindet. Ferner fällt ω weg und es bleibt einfach:

$$\frac{\Delta\omega'}{\text{Umlauf}} = 2\pi J \left(\frac{R}{p}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i\right).$$

Fügt man das wegen der Verlagerung des Knotens bedingte Glied

$$-\Delta\Omega \cos i = -2\pi J \left(\frac{R}{p}\right)^2 \cos^2 i \text{ hinzu, dann erhält man:}$$

$$(71) \quad \frac{\Delta\omega}{\text{Umlauf}} = 2\pi J \left(\frac{R}{p}\right)^2 \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i\right) = \pi J \left(\frac{R}{p}\right)^2 (5 \cos^2 i - 1).$$

Auf einen Tag umgerechnet:

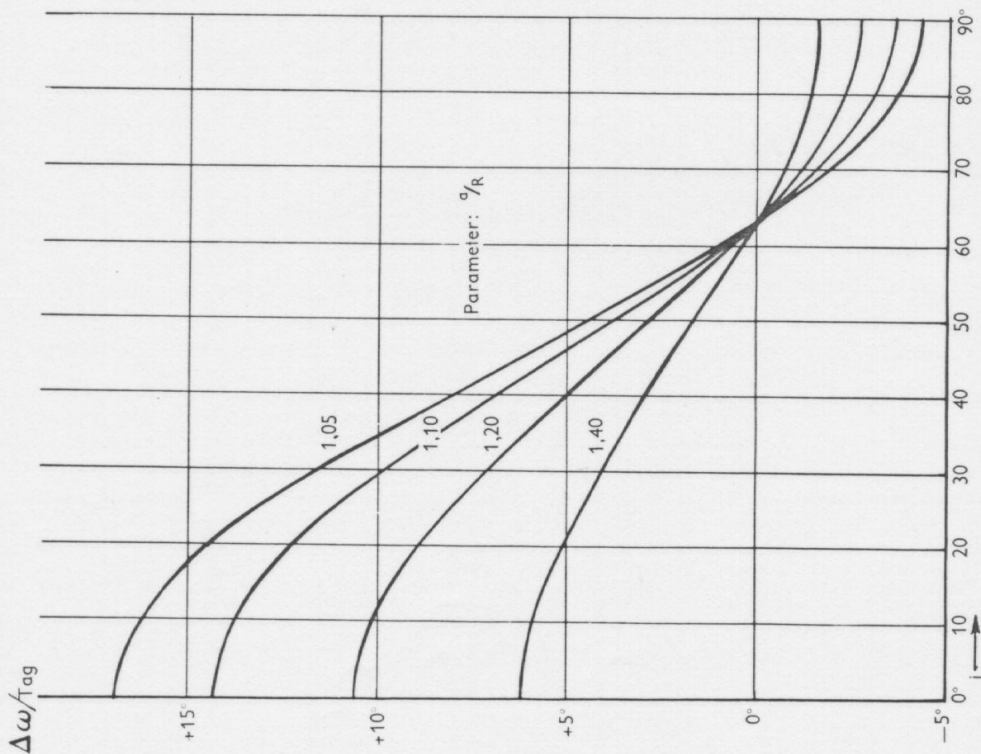


Fig. 37. Diagramm zur Bestimmung der Drehung der Bahnellipse (Apsiddrehung) infolge der Erdatplattung als Funktion der Bahnneigung und des mittleren Abstandes.

$$(72) \quad \frac{\Delta\omega}{\text{Tag}} = \frac{5 \cdot 0}{7/2} \frac{1}{(1 - e^2)^2} (5 \cos^2 i - 1).$$

Fig. 37 gibt für 4 Werte $\frac{a}{r}$ die Kurven $\frac{\Delta\omega}{\text{Tag}}$ als Funktion von i ($e \approx 0$).

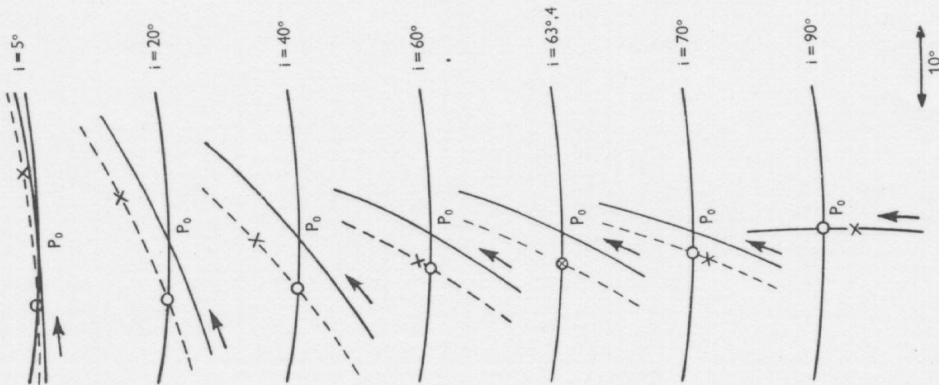


Fig. 38. Zusammenwirken von Präzession und Apsiddrehung für verschiedene Bahnneigungen. Das jeweils ausgezogene Bahnstück gilt für die Zeit t_0 , das gestrichelte für einen Tag später. Knoten und Perigäum sind zur Zeit t_0 im Punkt P_0 zusammenfallend angenommen; ihre Lage nach einem Tag: Knoten = Kreis, Perigäum = Kreuz.

Diese Bahndrehung, auch Apsidendrehung genannt, da die große Achse auch Apsidenlinie heißt, hat folgende Eigenschaften: sie ist Null für $\cos^2 i = \frac{1}{5}$, d. h. für $i = 63^\circ 4'$, positiv für $i < 63^\circ 4'$, negativ für $i > 63^\circ 4'$.

Positives $\Delta\omega$ bedeutet, daß sich die Ellipse im gleichen Sinne dreht, in dem der Satellit umläuft. Nur für $i = 63^\circ 4'$ bleibt das Perigäum stets über demselben Breitenkreis (wegen der periodischen Störungen führt es auch periodische Schwankungen aus), für $i \neq 63^\circ 4'$ durchwandert es im Laufe der Zeit alle Breiten β zwischen $\pm i$. Für sehr kleines i ist $\Delta\omega = -2\Delta\Omega$. Das bedeutet, da ω ja vom Knoten aus gerechnet wird, daß sich Knoten und Perigäum, von einer festen Richtung aus gerechnet, gleich schnell nach verschiedenen Seiten bewegen; vgl. Fig. 38, in die schematisch für verschiedene i -Werte die Bahnlage gegenüber dem Äquator für jeweils zwei aufeinanderfolgende Tage eingezeichnet ist. Dabei ist angenommen, daß im ersten Zeitpunkt $\omega = 0$ ist, Perigäum und Knoten also im Punkt P_0 zusammenfallen. Für den zweiten Zeitpunkt ist der Knoten durch einen Kreis, das Perigäum durch ein Kreuz markiert. Die Figur ist ungefähr maßstäblich für $\frac{a}{R} = 1.05$.

Die Ursache für die Drehung der Apsidenlinie ist darin zu suchen, daß für $|\beta| < 35^\circ 3'$ die Gravitationsbeschleunigung nach außen schneller abnimmt, als dem quadratischen Abstandsgesetz entspricht, für $|\beta| > 35^\circ 3'$ aber langsamer. (siehe Fig. 34). Beide Effekte würden sich bei einer Bahn mit $i = 90^\circ - |\beta| = 54^\circ 7'$ während eines Umlaufs kompensieren, wenn das Glied $-\Delta\Omega \cos i$ nicht wäre. Dieses bewirkt, daß ω erst bei $i = 63^\circ 4'$ konstant bleibt.

Als Beispiele mögen wieder Sputnik II und Explorer VII dienen. Nach (72) erhält man $\frac{\Delta\omega}{\text{Tag}} = -0^\circ 43$ bzw. $+3^\circ 36$ gegenüber den beobachteten Werten $-0^\circ 42$ bzw. $+3^\circ 42$. Schließlich noch die Werte für Discoverer II (1959 γ), dessen Bahn fast genau über die Pole verlief ($i = 89^\circ 9$, $\frac{a}{R} = 1.046$): Beobachtung $\frac{\Delta\omega}{\text{Tag}} = -4^\circ 33$, Theorie $-4^\circ 28$.

Fig. 39 zeigt 7 Projektionsbahnen von Explorer VII zwischen dem 6. 3. und 5. 5. 1961, die erkennen lassen, wie sich die Bahn infolge der Knotendrehung im Zeitintervall von je 10 Tagen gegenüber einer raumfesten Richtung verlagert hat (nicht gegenüber der Erdoberfläche; es sind daher nur Breiten, aber keine Längen angeschrieben). Auf jeder Bahn ist die jeweilige Perigäumslage durch einen Kreis markiert. Das Perigäum hat in diesem Zeitraum alle Breiten zwischen -3° bis $+50^\circ 3'$ ($= i$) und zurück bis -10° durchlaufen.

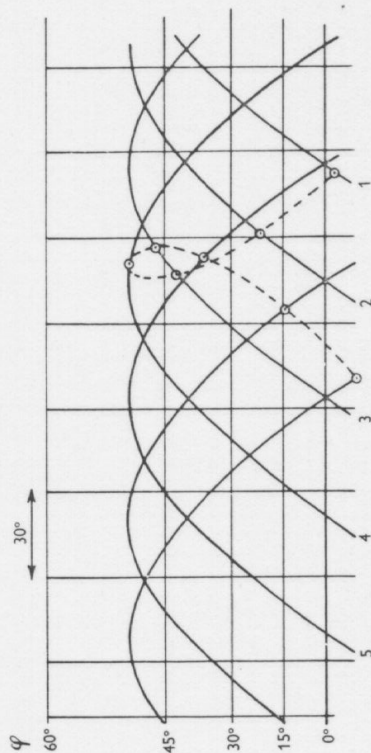


Fig. 39. Sieben Projektionskurven von Explorer VII im Abstand von je 10 Tagen (April/Mai 1961). Die Verschiebung in Länge infolge Präzession ist gegenüber einer raumfesten Richtung zu denken, nicht gegenüber der rotierenden Erdoberfläche; daher auch keine Längenangaben. Kreise geben die jeweilige Lage des Perigäums an.

Da die Ursache für die Apsidendrehung nicht leicht zu veranschaulichen und auch die mathematische Ableitung nicht einfach ist, soll der Spezialfall einer Bahn in der Äquatorebene nochmals behandelt werden. Mit $i = 0$ ist nach (62) und (63) $R = -\frac{\mu}{r^4} J B^2$ und $S = 0$. Das bedeutet, wie zu erwarten, daß die Störbeschleunigung nach dem Erdmittelpunkt zu gerichtet ist und sich zu dem $\gamma_0 = -\frac{\mu}{r^2}$ einer kugelförmigen Erde addiert. Gleichung (43) lautet jetzt, ohne das Glied mit $d\Omega$, einfach*:

$$e \frac{d\omega'}{dt} = -\sqrt{\frac{p}{\mu}} R \cos v = \sqrt{\frac{p}{\mu}} J R^2 \frac{\cos v}{r^4}$$

Ersetzt man dt durch dv mit Hilfe von $r^2 \frac{dv}{dt} = \sqrt{\mu p}$, dann erhält man:

$$e d\omega' = J R^2 \frac{\cos v}{r^2} dv = \frac{J R^2}{p^2} (1 + e \cos v)^2 \cos v dv$$

Bei der Integration über einen Umlauf verschwindet nur das Glied

$$2e \int_0^{2\pi} \cos^2 v dv = 2\pi e$$

* Für $i = 0$ gibt es keinen Knoten mehr, ω ist also unbestimmt; ω' rechnet dann von einer festen Richtung in der Äquatorebene aus, etwa vom γ .

$$\frac{\Delta\omega'}{\text{Umlauf}} = \frac{2\pi J R^2}{p^2}$$

Das ist identisch mit dem früheren Ergebnis, wenn $i = 0$ gesetzt wird.

Wäre z. B. \mathbf{R} proportional zu r^{-2} statt zu r^{-4} , dann würde sich das Integral reduzieren auf $\int_0^{2\pi} \cos v \, dv = 0$. Das ist aber auch zu erwarten, denn eine solche Störkraft würde ja das r^{-2} -Gesetz für Massenpunkte nicht ändern, sie wäre einfach durch eine größere Erdmasse zu berücksichtigen! Für \mathbf{R}

proportional zu r^{-1} erhielte man als maßgebendes Integral $\int_0^{2\pi} \frac{\cos v}{1 + e \cos v} \, dv$

$\approx \int_0^{2\pi} (1 - e \cos v) \cos v \, dv = -2\pi e$. Es wäre also $\Delta\omega'$ negativ, da in diesem Fall γ zwar auch größer ist als γ_0 , nach außen aber langsamer abnimmt, als dem r^{-2} -Gesetz entspricht.

An Hand von Fig. 40 soll noch eine anschauliche Deutung für die Apsidendrehung in der Äquatorebene gegeben werden. Die Wirkung der Störbeschleunigung \mathbf{R} in den Bahnpunkten S_1 und S_2 wird sein,

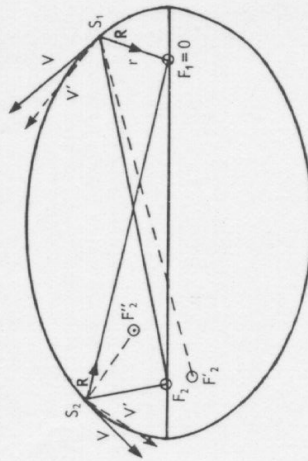


Fig. 40. Wirkung einer radialen Komponente der Störbeschleunigung auf die Richtung der großen Achse (zur Deutung der Drehung der Bahnellipse).

daß der Geschwindigkeitsvektor V der ursprünglichen Bahn übergeht in den gestrichelt gezeichneten Vektor V' , während der Ortsvektor $F_1 S_1$ bzw. $F_1 S_2$ bleibt (siehe 4.2). Da die Tangente stets gleiche Winkel mit den Richtungen nach den Brennpunkten bildet, muß der zweite Leitstrahl $S_1 F_2$ bzw. $S_2 F_2$ übergehen in $S_1 F_2'$ bzw. $S_2 F_2'$, wobei die Lage der neuen Brennpunkte F_2' und F_2'' aus der Bedingung zu finden ist, daß die Summe der Abstände der Bahnpunkte von den Brennpunkten stets $2a$ sein muß (a wird durch \mathbf{R} nur wenig geändert, da $\frac{da}{dt}$, wie aus (41)

folgt, proportional zu e ist.) Dann muß aber F_2' unterhalb, F_2'' oberhalb der ursprünglichen großen Achse liegen, $\Delta\omega'$ also im Punkt S_1 positiv, in S_2 negativ sein. Im Endeffekt, über einen ganzen Umlauf, überwiegt aber die positive Drehung (in Richtung der Bahnbewegung), da \mathbf{R} wegen des Exponenten -4 im Perigäumsteil der Bahn weit größer ist als im Apogäumsteil.

Der Fall einer Bahndrehung in der Äquatorebene eines Planeten ist in der Astronomie schon seit langem bekannt. Z. B. dreht sich die Bahn des 5. Jupitermondes, der dem stark abgeplatteten Planeten sehr nahe steht, um 2:5 pro Tag.

6. Störungen der großen Halbachse und der Exzentrizität; kurzperiodische und langperiodische Störungen

Wenn man die Gleichung (41) für $\frac{da}{dt}$ über einen vollen Umlauf integriert, in gleicher Weise wie dies bisher für Ω und ω getan wurde, dann findet man nach etwas umständlicher Rechnung (ähnlich wie bei ω), daß das Integral verschwindet, daß also a keine fortschreitenden sondern nur periodische Änderungen während eines Umlaufs erfährt. Einfacher ist der Beweis zu führen, daß dies auch für p gilt. Es ist (siehe 4.2):

$$\frac{dp}{dt} = 2 \sqrt{\frac{p}{\mu}} r S.$$

Daraus wieder mit Hilfe des Flächensatzes:

$$(73) \quad \frac{dp}{du} = -2 J \frac{R^2}{p} \sin^2 i \sin 2u (1 + e \cos v).$$

Setzt man $v = u - \omega$, entwickelt $\cos(u - \omega)$ und integriert über u von 0 bis 2π , dann findet man, daß das Integral verschwindet. Die Amplitude der periodischen Variation von p während eines Umlaufs (kurzperiodische Störung) auf einer Polbahn mit kleinem e und $\frac{p}{R} = 1.10$ beträgt 19 km.

Da weder a noch p säkulare Änderungen erfahren, gilt dies auch für die Exzentrizität e .

In den Ausdrücken (66), (69), (70), (73) für die Differentialgleichungen der Störungen in den Elementen (die Störungen in dem Element M_0 , der mittleren Anomalie zur Zeit der Epoche, werden nicht behandelt, da sie im Folgenden nicht gebraucht werden) kommen als Variable u und $v = u - \omega$ vor. Bisher wurden durch Integration über einen vollen Umlauf die säkularen Änderungen abgeleitet, wobei $\omega = \text{const}$ gesetzt wurde. Integriert man mit $\omega = \text{const}$ nicht über einen vollen Umlauf, dann erhält man recht komplizierte Funktionen von u und v , und zwar treten in allen Integralen sin- und cos-Glieder der Argumente u und v

gezeichnet. Kurzperiodische Glieder mit einer Periode von U (100^m) oder $\frac{U}{2}$ konnten hier nicht dargestellt werden. Die säkularen Änderungen in Ω und ω erscheinen in fast geradlinigen Kurven; ω variiert anfangs mit einer Periode von 74d. Die Kurven wurden für einen hypothetischen Satelliten mit den Anfangswerten $a_0 = 1.124 R$, $e_0 = 0.0675$, $\omega_0 = 90^\circ$ und $i = 45^\circ$ gerechnet. Ein weiteres Beispiel für eine langperiodische Störung zeigt Fig. 42. In

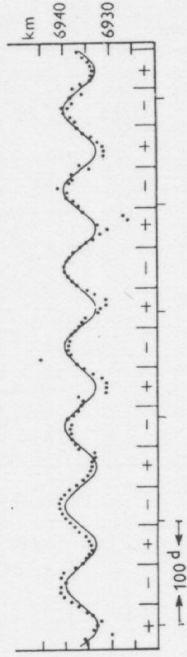


Fig. 42. Periodische Variation des geozentrischen Perigäumsabstands von Vanguard II infolge Ungleichheit der Nord- und Südhalbkugel der Erde. In den mit + und - bezeichneten Zeitschnittstellen ist das Perigäum über der Nord- bzw. Südhalbkugel.

ihr sind als Punkte die aus den Beobachtungen abgeleiteten Abstände des Perigäums vom Erdmittelpunkt von Vanguard II (1959 α_1) aufgetragen. Sie haben eine Amplitude von 7 km bei einer Periode von 68d. Das ist aber gerade die Periode eines Umlaufs der Apsidenlinie bei diesem Satelliten. Die Störung wird verursacht durch das Glied mit H in (53), das durch eine Unsymmetrie im Gravitationsfeld über der Nord- und Südhalbkugel der Erde bedingt ist. r_{Pz} ist größer, wenn das Perigäum über der Südhalbkugel, kleiner, wenn es über der Nordhalbkugel liegt. Die Südhalbkugel ist hiernach um ein wenig stärker abgeplattet als die Nordhalbkugel, der Südpolradius um 33 m kleiner als der Nordpolradius.

7. Umlaufzeit und 3. Keplersches Gesetz

Wegen der säkularen Verlagerung von Knoten und Perigäum muß man zwischen der Umlaufzeit U_Ω von Knoten zu Knoten und der Umlaufzeit U_π von Perigäum zu Perigäum unterscheiden. Der Unterschied zwischen beiden ist gleich der Zeit, die der Satellit braucht, um den Winkel $\Delta\omega$ in (71) zurückzulegen. Diese ist im Mittel:

$$(74) \quad U_\pi - U_\Omega = \frac{\Delta\omega}{n} = U J \left(\frac{R}{p} \right)^2 \frac{5 \cos^2 i - 1}{2}$$

Man vergleiche hiermit die in 2.7 besprochene Differenz für Explorer VII. Beim ungestörten Zweikörperproblem ist U mit a durch das 3. Keplersche Gesetz $U^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3$ verknüpft. Nun gibt es aber hier kein kon-

V. Störungen infolge Abplattung der Erde
 sowie vom 2- und 3fachen dieser Winkel auf, im Falle von Ω und ω außerdem auch Glieder mit u . Diese letzteren ergaben ja bei der Integration von 0 bis 2π die säkularen Änderungen. Die sin- und cos-Glieder mit Perioden gleich U , $\frac{U}{2}$ und $\frac{U}{3}$ werden als kurzperiodische Glieder bezeichnet. Ihre Amplituden sind i. a. nur gering; vgl. z. B. das oben über die Amplitude bei p oder in 5.4 über die periodischen Störungen in Ω und i Gesagte, sowie Abschnitt 5.8. Da in allen Differentialgleichungen auf der rechten Seite ω auftritt, das, abgesehen vom Fall $i = 63^\circ 54'$, säkular veränderlich ist, ist zu erwarten, daß bei strenger Integration außer den kurzperiodischen auch langperiodische Störungsglieder auftreten. Die Periode dieser Glieder ist wegen der vorausgesetzten Symmetrie des Erdfeldes zum Äquator (wenn nur das Glied mit J berücksichtigt wird) gleich der Hälfte der Periode von ω , also eines Umlaufs der Apsidenlinie, da die Wirkung der Erdabplattung gleich ist bei gleicher Lage des Perigäums nördlich oder südlich des Äquators und gleicher Bewegungsrichtung des Satelliten im Perigäum gegenüber dem Äquator. Die Amplituden der langperiodischen Glieder sind ebenfalls meist sehr klein.

Fig. 41 zeigt das Ergebnis einer strengen numerischen Integration der Gleichungen (40) bis (43) unter Hinzunahme von Gliedern, die den

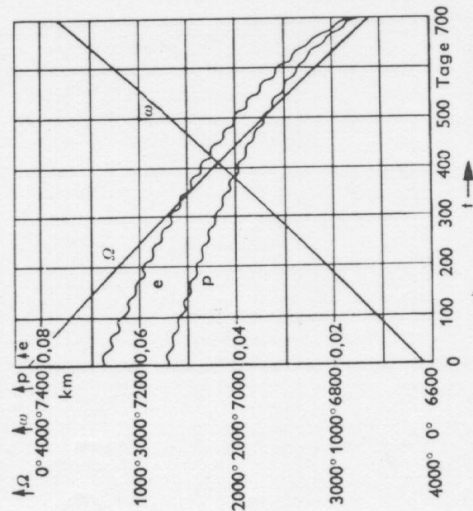


Fig. 41. Beispiel für die zeitliche Änderung der Bahnelemente durch Erdabplattung und Luftwiderstand; Ergebnis einer strengen Integration der Differentialgleichungen für die Störungen in den Elementen (Ausgangselemente willkürlich angenommen).

Luftwiderstand berücksichtigen. Daher der immer rascher werdende Abfall der Kurven für p und e bis zum Absturz des Satelliten. Ihre Wellenlinien zeigen auffällig den Einfluß der langperiodischen Glieder mit einer Periode von $37d$. Die Amplituden sind allerdings übertrieben

stantes a mehr; a unterliegt vielmehr während eines Umlaufs periodischen Änderungen und das 3. Keplersche Gesetz gilt jeweils nur für das a einer bestimmten oskulierenden Ellipse und das U , das im ungestörten Fall zu dieser Ellipse gehören würde. Die Verhältnisse werden noch dadurch kompliziert, daß U auch von i abhängt, wie dies ja bereits der Unterschied zwischen U_π und U_Ω zeigt.

Um trotzdem einen Vergleich zwischen der Umlaufzeit bei gestörter und bei ungestörter Bewegung zu haben, kann man mit Hilfe der Gleichungen für die Störungen in den Elementen eine Formel ableiten, die U_π (oder U_Ω) als Funktion von \bar{a} (= zeitlicher Mittelwert der a der oskulierenden Ellipsen während eines Umlaufs) und i gibt. Da U_π die Zeit ist, nach der der Satellit wieder gleiche mittlere Anomalie M hat, muß man dabei die säkularen Störungen in M während eines Umlaufs berücksichtigen. Da die Formel hier nicht abgeleitet wurde, soll das Ergebnis ohne Beweis angeschrieben werden; einen Beweis auf Grund anderer Überlegungen siehe unten.

Für kleine Exzentrizitäten e (was im Folgenden stets vorausgesetzt werden soll) gilt:

$$(75) \quad U_\pi = U(\bar{a}) - U J \left(\frac{R}{a} \right)^2 \frac{3 \cos^2 i - 1}{2}.$$

Dabei ist $U(\bar{a})$ die Umlaufzeit in einer ungestörten Ellipse mit der großen Halbachse \bar{a} , d. h. für $U(\bar{a})$ und \bar{a} gilt das 3. Keplersche Gesetz. Im „Störungsglied“ auf der rechten Seite ist U und a statt $U(\bar{a})$ und \bar{a} geschrieben, da es wegen der Kleinheit von J genügt, Näherungswerte einzusetzen (ebenso in (74)).

Man kann die Frage nach einem Vergleich zwischen den Umlaufzeiten in der gestörten Bahn und ungestörten Ellipse auch so stellen: wie groß ist U_π in der gestörten Bahn gegenüber der Umlaufzeit $U(\bar{a})$ in der ungestörten Ellipse bei gleicher mittlerer Entfernung \bar{r} , wo also $U(\bar{r})$ nach dem 3. Keplerschen Gesetz aus $\bar{r} = a$ (jedenfalls für kleines e), da stört Keplerschen Bewegung ist $\bar{r} = a$ (jedenfalls für kleines e), dagegen ist im Schwerfeld der abgeplatteten Erde $\bar{r} \neq \bar{a}$. Es gilt vielmehr [siehe (79), wo der zweite Summand in der Klammer eben diesen Unterschied darstellt]:

$$\bar{r} = \bar{a} - J \frac{R^2}{a} \frac{3 \cos^2 i - 1}{2}.$$

So ist z. B. \bar{r} für $\frac{a}{R} = 1.10$ und $i = 0^\circ$ um rund 10 km kleiner als \bar{a} .

Der Differenz ($\bar{r} - \bar{a}$) entspricht nach dem 3. Keplerschen Gesetz [siehe (83)] ein Unterschied in den Umlaufzeiten:

$$U(\bar{r}) - U(\bar{a}) = \frac{3}{2} \frac{U}{a} (\bar{r} - \bar{a}),$$

so daß man schließlich erhält:

$$(76) \quad U_\pi = U_0 + U J \left(\frac{R}{a} \right)^2 \frac{3 \cos^2 i - 1}{4}$$

$$(77) \quad U_\Omega = U_0 - U J \left(\frac{R}{a} \right)^2 \frac{7 \cos^2 i - 1}{4},$$

worin U_0 statt $U(\bar{r})$ geschrieben wurde.

Fig. 43 stellt die Unterschiede ($U_\pi - U_0$) und ($U_\Omega - U_0$) für $\frac{a}{R} = 1.10$

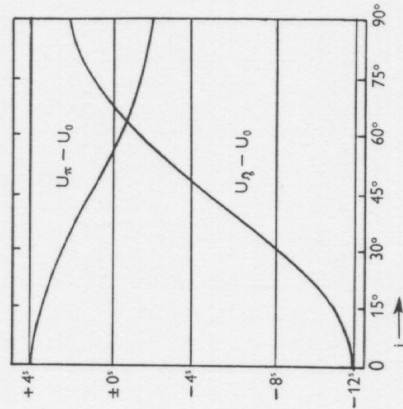


Fig. 43. Umlaufzeit in Abhängigkeit von der Bahnneigung.

U_π = anomalistische Umlaufzeit (von Perigäum zu Perigäum).

U_Ω = Knoten-Umlaufzeit (von Knoten zu Knoten).

U_0 = Umlaufzeit eines Satelliten in gleicher mittlerer Entfernung für den

Fall der Erde als Massenpunkt.

als Funktion von i graphisch dar. Trotz der Kleinheit der Differenzen summieren sie sich nach vielen Umläufen zu großen Unterschieden im Ort des Satelliten auf. Z. B. wäre U_Ω für Echo I bei jeweils gleichen \bar{r} :

bei kugelförmiger Erde um 4:1 größer

bei einer Bahn mit $i=0^\circ$ um 7:0 kleiner

bei einer Bahn mit $i=90^\circ$ um 5:9 größer

als beobachtet.

Die Beobachtungen liefern zunächst U_π oder U_Ω . Daraus muß U_0 und nach dem 3. Keplerschen Gesetz $\bar{\tau}$ bzw. \bar{a} berechnet werden. Tabellen in dem Seite 28 erwähnten Tabellenwerk erleichtern diese Umrechnung. Gleichung (77) soll nun noch auf Grund folgender Überlegung abgeleitet werden: das 3. Keplersche Gesetz kann in der Form geschrieben werden:

$$U_0^2 = \frac{4\pi^2}{\bar{\tau}^3} = 4\pi^2 \frac{\bar{\tau}}{\gamma},$$

wobei γ die Gravitationsbeschleunigung für die Erde als Massenpunkt im Abstand $\bar{\tau}$ ist. Eine Änderung von γ bei konstantem $\bar{\tau}$ bewirkt eine Änderung von U nach der Gleichung:

$$\frac{\Delta U}{U} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta \gamma}{\gamma}.$$

Zum Beispiel hat ein größeres γ bei gleichem $\bar{\tau}$ eine größere Zentrifugalbeschleunigung, also eine größere Winkelgeschwindigkeit und damit ein kleineres U zur Folge.

Während eines Umlaufs im Schwerfeld der abgeplatteten Erde variiert γ bei gleichem r mit der geozentrischen Breite β nach (56), d. h. es ist

$$\frac{\Delta \gamma}{\gamma} = J \left(\frac{R}{\bar{\tau}} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \beta) = J \left(\frac{R}{\bar{\tau}} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 i \sin^2 u),$$

Es wird sich nun darum handeln, den Einfluß dieses während eines Umlaufs als Funktion von u variierenden γ auf U zu berechnen. Dazu muß man den zeitlichen Mittelwert von $\frac{\Delta \gamma}{\gamma}$ über einen Umlauf bilden:

$$\left(\frac{\Delta \gamma}{\gamma} \right) = \frac{1}{U} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta \gamma}{\gamma} dt.$$

Führt man, wie früher, mit Hilfe des Flächensatzes u statt t ein, dann erhält man:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta \gamma}{\gamma} \right) &= \frac{J R^2}{U \sqrt{\mu p}} \int_0^{2\pi} (1 - 3 \sin^2 i \sin^2 u) du = \\ &= \frac{2\pi}{U \sqrt{\mu p}} J R^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right); \end{aligned}$$

damit:

$$\Delta U = -\frac{\pi J R^2}{\sqrt{\mu p}} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) = -U J \left(\frac{R}{a} \right)^2 \frac{3 \cos^2 i - 1}{4}.$$

Für $i = 0$ z. B. ist ΔU negativ, da γ größer ist bei kugelförmiger Erde im gleichen Abstand.

Bildet man nun $U_1 = U_0 + \Delta U$, dann ist U_1 weder das gesuchte U_π noch U_Ω , da bisher nur die Variation von γ längs der Bahn berücksichtigt wurde, nicht aber die Verlagerung von Perigäum und Knoten. U_1 ist vielmehr die Zeit, innerhalb deren der Radiusvektor einen Winkel von 2π gegenüber einer festen Ausgangsrichtung beschreibt – man kann sie

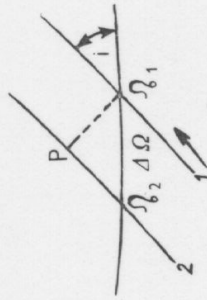


Fig. 44.

in Analogie zur astronomischen Definition als siderische Umlaufzeit bezeichnen. Stellen in Fig. 44 die Bahnen 1 und 2 zwei aufeinanderfolgende Umläufe dar, dann ist U_1 die Zeit von Ω_1 bis zu dem Punkt P , dem Ω_1 nächstgelegenen Punkt der Bahn 2.

Um zu U_Ω zu gelangen, muß die Zeit, die der Satellit von Ω_2 bis P braucht, von U_1 in Abzug gebracht werden. Diese ist (67):

$$\Delta t = \frac{\Delta \Omega \cos i}{n} = U J \left(\frac{R}{a} \right)^2 \cos^2 i$$

(da e klein angenommen wurde, kann $p = a$ gesetzt werden; man beachte auch, daß $\Delta \Omega$ in Fig. 44 negativ ist). Es bleibt schließlich:

$$U_\Omega = U_0 + \Delta U - \Delta t = U_0 - U J \left(\frac{R}{a} \right)^2 \frac{7 \cos^2 i - 1}{4}.$$

Das ist aber identisch mit (77).

8. Änderung des 2. Keplerschen Gesetzes und Störungen im Radiusvektor
Wie schon in 5.2 festgestellt, gilt der Flächensatz nicht mehr; das in der Zeiteinheit überstrichene Flächenelement erfährt kurzperiodische Änderungen mit der Periode $\frac{U}{2}$ in Abhängigkeit von der Stellung des

Satelliten gegenüber dem Äquator, d. h. als Funktion von u .

Eine Gleichung für die Änderung der Flächen-, „Konstanten“, F während eines Umlaufs gewinnt man leicht aus (73), da für jede der oskulierenden Ellipsen gilt: $F = \sqrt{\mu p}$. Daraus, für $e \approx 0$:

$$\frac{dF}{du} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{dp}{p} = -F J \left(\frac{R}{p} \right)^2 \sin^2 i \sin 2u.$$

Integriert:

$$(78) \quad F = F_0 + \frac{F}{2} J \left(\frac{R}{p} \right)^2 \sin^2 i \cos 2u.$$

Das pro Zeiteinheit überstrichene Flächenelement ist am größten für $u = 0^\circ$ und 180° , am kleinsten für $u = 90^\circ$ und $u = 270^\circ$. Setzt man diesen Ausdruck F statt c_1 in (30) ein, wobei jetzt allerdings auf der rechten Seite das Glied $-\frac{r^2}{F} R$ hinzukommt, dann erhält man nach

Integration für den Unterschied Δr zwischen dem Radiusvektor der gestörten Bahn und dem einer elliptischen Bahn mit einem a gleich dem mittleren a der oskulierenden Ellipsen:

$$(79) \quad \Delta r \approx J \frac{R^2}{p} \left(\frac{1}{6} \sin^2 i \cos 2u + \frac{1 - 3 \cos^2 i}{2} \right).$$

Sieht man vom zweiten Summanden ab, dann zeigt (79), daß r über dem Äquator größer, in den beiden Umkehrpunkten der Bahn kleiner ist als bei kugelförmiger Erde. Bei einer Polbahn sind die Unterschiede am größten; mit $\frac{a}{r} = 1.10$ ist r über dem Äquator um 1.6 km größer, über den Polen um 1.6 km kleiner. Fig. 45 zeigt diese Verhältnisse für eine Polbahn mit kleinem e .

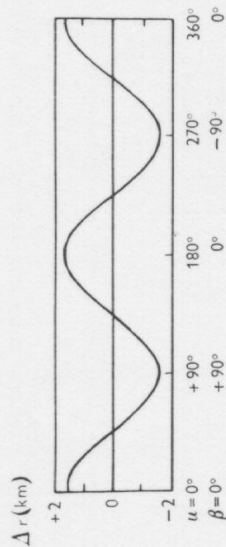


Fig. 45. Störungen im Radiusvektor infolge Erdatplattung bei einer nahe kreisförmigen Polbahn.

Interessant ist, daß die Variation von r während des Umlaufs auf einer solchen Bahn nur $\frac{1}{6}$ derjenigen von a oder p für die oskulierenden Ellipsen ist (siehe 5.6). Das liegt daran, daß r Funktion von a , e und M ist und wenn man Δr nicht, wie hier, direkt, sondern aus den kurzperiodischen Störungen Δa , Δe und ΔM bestimmt, dann findet man, daß der Einfluß von Δa weitgehend durch Δe und ΔM kompensiert wird. Diese Ableitung ist allgemeiner, aber recht umständlich.

Auch die Winkelgeschwindigkeit in der Bahn ist bei kleinem e am Äquator größer und in den Umkehrpunkten kleiner als bei Keplerscher Bewegung. Das folgt aus der Kombination von (78) und (79). Der dadurch bedingte Unterschied im Ort erreicht Extremwerte für $u = 45^\circ$, 135° , 225° und 315° . Bei einer Polbahn mit $\frac{a}{R} = 1.10$ ist der Satellit für $u = 45^\circ$ um 0.4 voraus, für $u = 135^\circ$ um ebenso viel hinter dem Keplerschen Ort zurück. Die Störungen sind also nur sehr klein, doch muß man bedenken, daß sie für einen Beobachter, durch dessen Zenit der Satellit läuft, rund 10 mal so groß sind, da für ihn der Abstand des Satelliten nur $\frac{1}{10}$ seines Abstands vom Erdmittelpunkt ist.

Eine nicht zu vernachlässigende Exzentrizität kann diese Störungseffekte stark vergrößern. Die Formeln werden dann sehr kompliziert.

KAPITEL VI

DER EINFLUSS DES LUFTWIDERSTANDES

1. Allgemeines zum Luftwiderstandsgesetz

Neben der Abplattung der Erde hat der Luftwiderstand den stärksten Einfluß auf die Bahnverhältnisse. Die mathematische Behandlung der durch ihn bewirkten Bahnänderungen ist nicht mit gleicher Genauigkeit durchführbar wie bei der Abplattung, da der Luftwiderstand abhängt von der Form des Satelliten und der nicht sehr genau bekannten, zeitlich und örtlich variablen Luftdichte in der Hochatmosphäre. Andererseits hat die geringe Dichte den Vorteil, daß das Gesetz des Luftwiderstands sehr viel einfacher wird als für die dichteren Atmosphärenschichten. Zunächst kann man die Wärmebewegung der Luftmoleküle, die in Höhen über 200 km im Mittel von der Größenordnung 1 bis 3 km/sec ist, vernachlässigen gegenüber der Geschwindigkeit des Satelliten, d. h. man kann annehmen, daß die Moleküle nur von vorn aufreffen und außerdem ist die mittlere freie Weglänge der Moleküle in über 200 km Höhe sehr viel größer (rund 1 km in 220 km Höhe und über 1 000 km in 600 km Höhe) als die Dimensionen des Satelliten, so daß Moleküle, die nach dem Zusammenstoß von der Oberfläche des Satelliten wieder zurückgeworfen werden, nur in geringem Maß mit andern Molekülen zusammenstoßen, das Strömungsfeld der ankommenden Moleküle also nicht gestört wird.

Stellt man sich zunächst einen Körper mit einer ebenen Stirnfläche vom Querschnitt Q vor, der sich mit der Geschwindigkeit V senkrecht zu seiner Stirnfläche bewegt oder umgekehrt, was auf dasselbe hinauskommt, von Luftmolekülen der Geschwindigkeit V senkrecht getroffen wird, so kann man zwei Extremfälle unterscheiden: die Moleküle bleiben an der Oberfläche haften (unelastischer Stoß) oder sie werden mit der Geschwindigkeit V wieder senkrecht zur Fläche reflektiert (elastischer Stoß). Im zweiten Fall wird die auf den Körper ausgeübte Kraft doppelt so groß sein wie im ersten Fall. Diese berechnet sich aus der Überlegung, daß die in der Zeiteinheit auftreffende Luftmasse gleich ist $Q \rho V$, wobei $\rho =$ Luftdichte ist. Ihr Impuls ist $Q \rho V^2$ und dies ist bei unelastischen Stoß auch die Impulsänderung pro Zeiteinheit und damit die auf den Körper

ausübte Kraft, der Luftwiderstand L . Hat der Körper die Masse m , dann ist die ihm erteilte Beschleunigung in Richtung von V : $B_L = -\frac{Q \cdot \rho \cdot V^2}{m}$, wobei das Minuszeichen andeuten soll, daß es sich um eine Verzögerung handelt. Allgemeiner setzt man an:

$$(80) \quad B_L = -\frac{C}{2} \frac{Q}{\rho} V^2,$$

wobei der Faktor C , der Widerstandsbeiwert oder Widerstandskoeffizient, in dem angenommenen Fall für unelastischen Stoß 2, für elastischen Stoß 4 wäre. In Wirklichkeit werden die beiden Extremfälle nicht rein verwirklicht sein. Die von der Fläche wieder wegfliegenden Moleküle werden beim Aufprall einen Teil ihrer kinetischen Energie verloren haben, also mit Geschwindigkeiten kleiner als V wegfliegen, evtl. nur mit Geschwindigkeiten gleich der thermischen Geschwindigkeit, entsprechend der Oberflächentemperatur des Satelliten. Man spricht von „Akkommodation“ und sagt, es liege vollkommene Akkommodation vor, wenn der Wiederaustritt der Moleküle nur mit thermischer Geschwindigkeit erfolgt. Auch werden die Moleküle nicht in genau entgegengesetzter Richtung wie die ankommenden wegfliegen, die Reflexion kann mehr oder weniger diffus sein. Ebenso ist die Festsetzung des zu benutzenden effektiven Querschnitts Q bei unregelmäßig geformten Körpern nicht einfach und frei von Willkür. Man muß bei der Annahme von $C \cdot Q$ mit einem Unsicherheitsfaktor von der Größenordnung bis zu 2 rechnen, doch spielt dies bei unserer bis vor kurzem völligen Unkenntnis über die Hochatmosphäre keine entscheidende Rolle.

Der Quotient $\frac{m}{Q}$ heißt Querschnittsbelastung.

Der Luftwiderstand wird noch vergrößert, wenn sich der Satellit in einer teilweise ionisierten Atmosphäre (Plasma) bewegt und dabei selbst eine negative elektrostatische Aufladung erhält. Durch die Coulombsche Anziehung wird die Zahl der auftretenden Ionen vermehrt und das Strömungsfeld beeinflußt, doch soll im Folgenden von diesem Effekt abgesehen werden.

Für den – häufig als Modellfall benutzten – Fall einer Kugel ist C für elastischen und unelastischen Stoß gleich. Bei unelastischem Stoß ist der Luftwiderstand einfach:

$$L = \pi r^2 \rho V^2.$$

Beim elastischen Stoß betrachte man zunächst die Moleküle, die auf das Flächenelement dF , dessen Normale unter dem Winkel θ gegen die

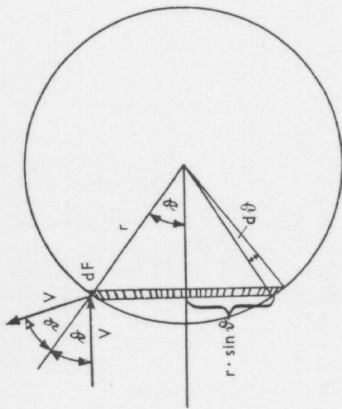


Fig. 46. Zur Berechnung des Luftwiderstands bei einer Kugel.

Richtung von V geneigt ist, aufzutreffen und auch wieder unter dem Winkel θ reflektiert werden. Der bei der Reflexion pro Zeiteinheit in Richtung V übertragene Impuls ist $\rho V^2 dF \cos \theta \cos 2\theta$, wobei der Faktor $\cos \theta$ von der Neigung des Flächenelements gegen die Richtung der auftretenden Moleküle herrührt. Alle auf die schraffierte Kugelzone der Breite $r d\theta$, also der Fläche $2\pi r^2 \sin \theta d\theta$ auftretenden Moleküle übertragen bei der Reflexion den Impuls

$$2\pi r^2 \rho V^2 \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2} \pi r^2 \rho V^2 \sin 4\theta d\theta.$$

Der Gesamtimpuls bei der Reflexion ist gleich dem von $\theta = 0$ bis $\theta = \frac{\pi}{2}$ genommenen Integral; dieses ist aber 0. Es bleibt also nur der Impuls der auftretenden Moleküle und dieser ist wie beim unelastischen Stoß $\pi r^2 \rho V^2$. Es heben sich bei einer Kugel die Wirkungen der unter $\theta < 45^\circ$ auftretenden und nach rückwärts reflektierten gegenüber den unter $\theta > 45^\circ$ auftretenden und nach rückwärts reflektierten Partikel auf. C ist also unter den gemachten Annahmen bei der Kugel stets 2. Das Beispiel zeigt übrigens, daß C auch kleiner als 2 sein kann, etwa bei einem mit der Spitze voranfliegenden Kegel mit kleinem Öffnungswinkel. Bei künstlichen Satelliten rechnet man meist mit C -Werten zwischen 2.0 und 2.5.

2. Bahänderungen durch den Luftwiderstand bei einer Kreisbahn

Im Folgenden werden stets die vereinfachenden Annahmen gemacht: die Flächen gleicher Dichte in der Atmosphäre sind Kugelflächen; die Rotation der Atmosphäre und etwa vorhandene Luftströmungen werden vernachlässigt. Unter diesen Annahmen ist die Richtung der Verzögerung

genau entgegengesetzt der Richtung von V , so daß man für die Komponente T der Störbeschleunigung in (44) und (45) schreiben kann $T = B_L = -\frac{C}{2} \frac{Q}{m} V^2$, während die andern Komponenten Null sind. Insbesondere wird die Lage der Bahnebene, also Ω und i , nicht beeinflusst. Die wesentlichsten Änderungen erfahren die Elemente a und e , die durch die Erdadabplattung nur wenig beeinflusst werden. Das ist für die mathematische Behandlung von Vorteil, da man die beiden Effekte in erster Näherung getrennt behandeln kann.

Der Luftwiderstand ist als Reibungskraft keine konservative Kraft, die Gesamtenergie des Satelliten muß daher abnehmen. Für diese war

$$(3.4) \text{ abgeleitet worden: } E = -\frac{\mu m}{2a}. \text{ Es ist also } da = \frac{2a^2}{\mu m} dE \text{ und da}$$

man nach dem Satz: Arbeit = Kraft \times Weg schreiben kann $dE = m \mathbf{T} ds = m \mathbf{T} V dt$ ($ds =$ Wegelement), so gilt:

$$(81) \quad \frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\mu} V \mathbf{T}.$$

Diese Gleichung ist identisch mit (44).

Bei einer Kreisbahn, bei der Q und V konstant sind, leitet man daraus leicht für die Änderung von a während eines Umlaufs ab, wenn noch zur Vereinfachung der Schreibweise eingeführt wird: $\frac{C Q}{m} = K$,

$$(82) \quad \frac{\Delta a}{\text{Umlauf}} = -2 \pi K \frac{\Delta a}{Q a^2}.$$

Die Folge dieser Bahnschrumpfung ist eine Verkürzung der Umlaufzeit. Nach dem 3. Keplerschen Gesetz muß gelten:

$$(83) \quad \frac{\Delta U}{U} = \frac{3}{2} \frac{\Delta a}{a}$$

(ΔU und Δa pro Umlauf gerechnet); oder, in etwas allgemeinerer Schreibweise:

$$(84) \quad \frac{1}{U} \frac{dU}{dt} = \frac{3}{2a} \frac{da}{dt}.$$

Es ist also für Kreisbahnen:

$$(85) \quad \frac{\Delta U}{\text{Umlauf}} = -3 \pi K \frac{Q}{a U}.$$

Wegen der fortschreitenden Änderung von a und U gilt streng genommen das 3. Keplersche Gesetz nicht mehr in der gewöhnlichen Form, sondern

nur noch in der Differentialform (84). Es gibt ja auch keine genaue Kreisbahn (und auch keine Ellipsenbahn) mehr, der Satellit bewegt sich vielmehr in einer immer enger werdenden spiralförmigen Bahn. Einen einzelnen Umlauf kann man aber praktisch immer als Kreis (bzw. Ellipse) auffassen, für den das 3. Keplersche Gesetz jeweils in Näherung gilt. Nur im letzten Stadium, kurz vor dem Verglühen in den tieferen Atmosphärenschichten, ist dies nicht möglich.

Ein scheinbares Paradoxon liegt darin, daß der Satellit als Folge der bremsenden Wirkung des Luftwiderstandes in kürzerer Zeit umläuft und seine Geschwindigkeit zunimmt. Diese ist ja in der Kreisbahn gegeben durch $V^2 = \frac{\mu}{a}$ und in der Ellipse ist der zeitliche Mittelwert über

einen Umlauf ebenfalls $V^2 = \frac{\mu}{a}$. Man kann sich dieses Paradoxon erklären, wenn man beachtet, daß der Satellit bei einer Verkleinerung von

a um Δa an potentieller Energie $\Delta E_{\text{Pot}} = \frac{\mu m}{a^2} \cdot \Delta a$ verliert, aber an

kinetischer Energie aus dem Schwerfeld der Erde $\Delta E_{\text{Kin}} = \frac{1}{2} \frac{\mu m}{a^2} \cdot \Delta a$

gewinnt, die Geschwindigkeit also zunehmen muß. Die Differenz, nämlich $\frac{1}{2} \frac{\mu m}{a^2} \cdot \Delta a$, wird an die Atmosphäre abgegeben. Der Satellit

gewinnt also im Schwerfeld der Erde pro Zeiteinheit ebensoviel an kinetischer Energie, wie er an die Atmosphäre abgibt, verliert aber das Doppelte an potentieller Energie (siehe 3.4).

Es soll noch kurz der Übergang von der Kreisbahn zur Spirale betrachtet werden. Man denke sich den Satelliten zunächst im luftleeren Raum auf einer genauen Kreisbahn umlaufen (daß dies wegen der Erdadabplattung streng genommen nicht möglich ist, braucht hier nicht beachtet zu werden). Von einem bestimmten Augenblick an sei aber die Atmosphäre wieder vorhanden, der Satellit wird gebremst und seine Geschwindigkeit zunächst vermindert. Die Folge wird sein, daß das bis dahin bestehende Gleichgewicht zwischen Gravitationskraft und Zentrifugalkraft zugunsten der ersteren gestört ist und der Satellit sich der Erde nähert; die Spirale beginnt. Von diesem Zeitpunkt an nimmt die Geschwindigkeit von Umlauf zu Umlauf zu.

Um eine Vorstellung von der Größenordnung der zu erwartenden Änderungen zu geben, werde als Beispiel ein Satellit in einer Kreisbahn in 300 km Höhe, $a \approx 6.7 \cdot 10^8$ cm, $U = 90$ m = 5400 s angenommen. Für seine Dimensionen sollen die von Sputnik I (Kugel) mit $Q = 2.6 \cdot 10^3$ cm², $m = 8.4 \cdot 10^4$ gr, also $K = 6.2 \cdot 10^{-2}$ angenommen werden und als Dichte

$q = 4 \cdot 10^{-14}$ gr/cm³. Man findet: $\frac{\Delta U}{\text{Umlauf}} = -0.08$. (Bei Sputnik I war die entsprechende Zahl -0.13 , doch darf man keinen Vergleich dieser Zahlen anstellen, da die Flughöhe von Sputnik I zwischen 230 und 940 km variierte.) Die errechnete Verkleinerung von U um rund 0.1 pro Umlauf erscheint sehr klein und doch ist ihr Einfluß auf den Ort des Satelliten bereits nach wenigen Tagen merkbar. Angenommen, man hätte aus der Beobachtung eines Umlaufs die genaue Zeit t_0 eines Knotendurchgangs und die Knotenumlaufzeit U_0^0 bestimmt. Rechnet man mit konstantem U_0^0 die Zeit des Knotendurchgangs nach N Umläufen aus, dann erhält man $t_N = t_0 + N \cdot U_0^0$. Tatsächlich hätte man aber rechnen müssen, da nach N Umläufen $U_N = U_0^0 - N \cdot \Delta U$ ist: $t_N = t_0 + \left(U_0^0 - \frac{N \cdot \Delta U}{2} \right) \cdot N$. Der Unterschied zwischen den beiden Zeiten ist $\frac{N^2}{2} \cdot \Delta U$. Für das obige Beispiel beträgt er nach 10 Tagen mit $N = 160$ bereits 17 Min., um die der Satellit früher den Knoten passiert, als dies ohne Luftwiderstand der Fall gewesen wäre.

3. Bahnänderungen bei elliptischen Bahnen

Die Annahme einer Kreisbahn, wie sie im vorigen Abschnitt gemacht wurde, um einige prinzipielle Fragen zu behandeln, ist eine Vereinfachung, die praktisch nie realisiert ist und bei Berechnung des Einflusses des Luftwiderstands auch als Näherung nicht benutzt werden kann. Angenommen, e wäre nur 0.01, was nahe einer Kreisbahn entspricht, so unterscheiden sich bei $a = 7000$ km die Perigäums- und Apogäumshöhen um $2ae = 140$ km, und das bedeutet ein Verhältnis der Luftdichten von rund 5:1. Der Einfluß des Luftwiderstandes auf a und e ist zu berechnen aus (44) und (45):

$$(86) \quad \frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\mu} V T = -\frac{K}{\mu} a^2 q V^3$$

$$(87) \quad \frac{de}{dt} = \frac{2(\cos v + e)}{V} T = -K q V (\cos v + e).$$

Wie die Gleichungen erkennen lassen, nimmt a stets ab, einerlei in welchem Teil seiner Bahn sich der Satellit befindet. Nicht so bei e : für $\cos v < -e$ nimmt e zu. Das ist der Fall, solange sich der Satellit in der Bahnhälfte bewegt, die das Apogäum enthält. Im Endergebnis über einen ganzen Umlauf nimmt aber auch e stets ab, da das Produkt qV

in der Perigäumshälfte der Bahn wesentlich größer ist als in der Apogäumshälfte – es sind ja beide Faktoren größer. Es geht dies auch aus der rein qualitativen Überlegung in 3.4 hervor. Aber auch im Falle $q = \text{const}$, wenn sich also ein Körper in einem homogenen widerstehenden Medium bewegt, wird e im Laufe der Zeit abnehmen, die Bahn also immer kreisförmiger werden. Es ist nämlich $\int_0^U V (\cos v + e) dt > 0$; für kleines e hat das Integral den Wert $\pi e a$. Besonders groß ist wegen des Faktors V^3 der Einfluß des perigäumnahen Bahnteils auf a . Für die numerische Integration von (86) kann man daher V konstant und zwar gleich V_{Pe} setzen und für mäßige Exzentrizitäten schreiben (38): $V^2 \approx V_{Pe}^2 = \frac{\mu}{a} \frac{1+e}{1-e} \approx \frac{\mu}{a} (1+2e)$. Setzt man außerdem noch $V dt = ds$ (= Linienelement) und geht mit Hilfe von (84) auf dU über, so ergibt sich:

$$\frac{\Delta U}{\text{Umlauf}} \approx -\frac{3}{2} K U (1+2e) \int \varrho(H) ds,$$

wobei das Integral über den ganzen Umlauf zu nehmen ist. Bei der Auswertung zur Bestimmung von $\varrho(H)$ aus den beobachteten Werten ΔU muß man zunächst eine Annahme über den Dichteabfall oberhalb H_{Pe} machen und erhält dann ϱ_{Pe} . Aus den Beobachtungen von Satelliten mit verschiedenen Perigäumshöhen kann dann die Funktion $\varrho(H)$ ermittelt werden.

Um die Gleichungen (86) und (87) mathematisch auswerten zu können, muß man für $\varrho(H)$ einen analytischen Ausdruck einsetzen. Im allgemeinen benutzt man dabei den Ausdruck (7) $q = q_0 \cdot e^{-\frac{H-H_0}{H}}$, wobei H als Konstante angenommen wird und für q_0 die Dichte in der Höhe $H_0 = H_{Pe}$ einzusetzen ist. Wie schon in 1.4 erwähnt, ist die Annahme $H = \text{const}$ nicht richtig, doch ist der Fehler nicht sehr groß, wenn für H der Wert der Skalenhöhe für H_{Pe} eingesetzt wird, da der Einfluß der höheren Luftschichten nach oben rasch abnimmt. Zur weiteren Behandlung von (86) und (87) empfiehlt es sich, statt v die exzentrische Anomalie E einzuführen. Es ist ja (16) $r = a(1 - e \cos E)$ und damit formt man zunächst um: $H_0 - H = r_0 - r = -ae + ae \cos E$. Außerdem ist $V^2 = \frac{\mu}{a} \frac{1+e \cos E}{1-e \cos E}$ und mit Hilfe der aus der Keplerschen Gleichung abzuleitenden Beziehung $\frac{dE}{dt} = \frac{2\pi}{U} \frac{1}{1-e \cos E} g_0$ gewinnt man schließlich nach einigen Umformungen:

$$(88) \quad \frac{da}{dE} = -K a^2 \varrho_0 e^{-z} \frac{(1+e \cos E)^{3/2}}{(1-e \cos E)^{1/2}} e^z \cos E.$$

$$(89) \quad \frac{de}{dE} = -K a (1-e^2) \varrho_0 e^{-z} \left(\frac{1+e \cos E}{1-e \cos E} \right)^2 \cos E e^z \cos E$$

Hierbei wurde noch gesetzt: $\frac{ae}{H} = z$.

Entwickelt man nach Potenzen der Exzentrizität e und ersetzt $\cos^n E$ durch die entsprechenden Ausdrücke in $\cos(nE)$, so erhält man bei der Integration über einen Umlauf Integrale der allgemeinen Form:

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nE) \cdot e^z \cos E dE.$$

Diese zählen zu den Besselschen Integralen imaginären Arguments. Für $z \geq 2$ hat man die folgende brauchbare asymptotische Reihenentwicklung:

$$I_n(z) = \frac{\exp. z}{\sqrt{2\pi z}} \left[1 - \frac{4n^2 - 1^2}{11.8z} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!(8z)^2} - + \dots \right].$$

In der Anwendung auf (88) und (89) sollen hier der Einfachheit halber nur Glieder bis zur ersten Potenz in e und $\frac{1}{z}$ mitgenommen werden.

Man erhält dann, nach etwas weitläufiger Rechnung:

$$(90) \quad \frac{\Delta a}{\text{Umlauf}} = -K a^2 \varrho_0 \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left[(1+2e) + \frac{1}{8z} (1-6e) \right]$$

$$(91) \quad \frac{\Delta e}{\text{Umlauf}} = -K a \varrho_0 \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left[(1+e) - \frac{1}{8z} (3+7e) \right].$$

Das Auftreten des Faktors $\sqrt{\frac{1}{z}}$ kann man wie folgt deuten: ist H klein, nimmt also die Dichte nach oben rasch ab, dann wird der Einfluß des Luftwiderstands geringer sein als bei großem H . Den gleichen Effekt hat aber auch ein großes $a \cdot e$, also eine stark exzentrische Bahn. Beidemal verläuft ein großer Teil der Bahn in Höhen mit kleinem ϱ .

Um eine Vorstellung von der Größe von z zu erhalten, werde einmal eine Bahn mit $a = 7000$ km, $e = 0.05$, $a \cdot e = 350$ km, $H_{Pe} \approx 280$ km angenommen. Für dieses H_{Pe} ist $H \approx 50$ km, also $z \approx 7$. Für eine Bahn mit $a = 7800$ km, $e = 0.05$, $a \cdot e = 390$ km ist $H_{Pe} \approx 104$ km. Mit $H = 130$ km wird $z \approx 3.0$.

Gleichung (90) erlaubt, ϱ_0 aus den beobachteten Umlaufzeitänderungen zu bestimmen. Zusammen mit Gleichung (83) kann man schreiben:

$$(92) \quad \varrho_0 \sqrt{H} = -\frac{1}{3} \frac{\Delta U}{U} \sqrt{\frac{2e}{\pi a} \frac{1}{K} \left(1 - 2e - \frac{1}{8z} \right)}.$$

Man beachte, daß ΔU negativ ist!

Aus (82) und (83) leitet man weiter für die Änderung der Peri- bzw. Apogäumshöhe pro Umlauf ab:

$$(93) \quad \Delta H_{Pe} = -\frac{\Delta a}{2z} (1-2e)$$

$$(94) \quad \Delta H_{Ap} = -2 \cdot \Delta a \left(1 - \frac{1}{4z} \right).$$

Wie man erkennt, sinkt das Perigäum nur sehr langsam, das Apogäum aber rasch nach unten. Die Erklärung ist darin zu suchen, daß durch die relativ starke Bremsung im Perigäum die Geschwindigkeit und damit auch die Zentrifugalbeschleunigung gegenüber der Gravitationsbeschleunigung verkleinert wird, so daß der Satellit nicht mehr seine vorige Apogäumshöhe erreicht. Durch dieses Absinken im Schwerfeld der Erde gewinnt er aber an kinetischer Energie, so daß er nun im Apogäum eine größere Geschwindigkeit hat, die ihn wieder praktisch in die gleiche Perigäumshöhe bringt.

Die Formeln für die Änderung von V_{Pe} und V_{Ap} pro Umlauf lauten (abzuleiten aus (38), (90) und (91)):

$$(95) \quad \Delta V_{Pe} = -\text{const} \left(1 + e - \frac{7}{8z} \right)$$

$$(96) \quad \Delta V_{Ap} = +\text{const} \left(3 + e - \frac{5}{8z} \right).$$

wobei die Konstante gleich $\frac{1}{2} K a \varrho_0 V_{\text{Kreis}} \sqrt{\frac{2\pi}{z}}$ ist.

Während V_{Pe} abnimmt, nimmt V_{Ap} fast dreimal so rasch zu.

Weitere analytische Behandlung von (90) und (91) führt zu einer Gleichung für die ungefähre „Lebensdauer“ T_L eines Satelliten. Sie ist gewonnen durch Berechnung des Zeitraums, innerhalb dessen eine ursprünglich elliptische Bahn kreisförmig geworden ist. Wie aus Fig. 41 zu erkennen, geht e kurz vor dem Absturz rasch gegen 0. Sind U_0 , e_0 und $\left(\frac{\Delta U}{U}\right)_0$ die Werte zur Zeit t_0 , die gleich der Startzeit oder auch gleich einer späteren Zeit sein kann, dann gilt für die „Lebensdauer“, gerechnet von t_0 an:

$$(97) \quad T_L \approx -\frac{3}{4} \epsilon_0 \frac{U_0}{\left(\frac{\Delta U}{U}\right)_0}$$

Wegen des Minuszeichens beachte, daß $\left(\frac{\Delta U}{U}\right)_0$ negativ ist! Ist t ein beliebiger Zeitpunkt zwischen t_0 und $t_0 + T_L$ und bezeichnet man mit τ das Verhältnis des Zeitintervalls von t bis zum Absturz zum Zeitintervall von t_0 bis zum Absturz: $\tau = \frac{T_L}{t - t_0}$, dann lassen sich U , a und e als Funktion von τ genähert darstellen durch:

$$(98) \quad U \approx U_0 \left[1 - \frac{3}{2} \epsilon_0 (1 - \sqrt{\tau}) \right]$$

$$(99) \quad a \approx a_0 [1 - \epsilon_0 (1 - \sqrt{\tau})]$$

$$(100) \quad e \approx \epsilon_0 \sqrt{\tau}$$

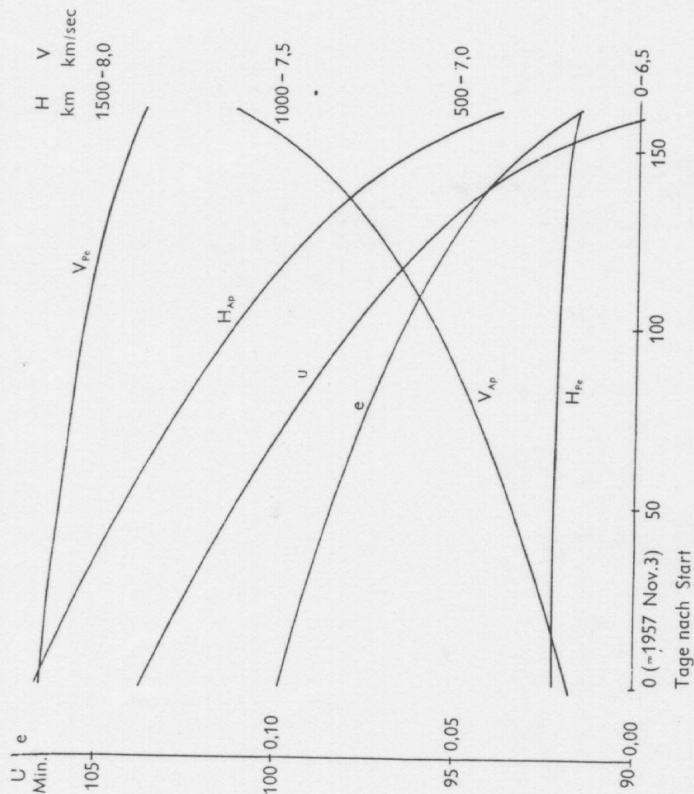


Fig. 47. Änderung der Bahnelemente von Sputnik II als Folge des Luftwiderstandes.

Die Gleichungen (97) bis (100) sind unter der Voraussetzung zeitlich konstanter atmosphärischer Verhältnisse abgeleitet und können daher Ergebnisse liefern, die von der Wirklichkeit stark abweichen. Besonders die variable Sonnenaktivität – man denke etwa an die Schwankungen im Rahmen der 11-jährigen Sonnenfleckenperiode – wirkt sich in diesem Sinne aus. Daß die Gleichung für T_L für $e = 0$ versagt, ist mathematisch bedingt, da ja dann auch $z = 0$ ist. Überhaupt werden alle Formeln dieses Abschnitts kurz vor dem Absturz des Satelliten unbrauchbar, da dann e und also auch z gegen Null gehen. Für dieses Stadium muß man eine andere Reihenentwicklung für $I_n(z)$ benutzen. Erfahrungsgemäß ist die „Lebenserwartung“ eines Satelliten, dessen U auf weniger als 88 bis 89 Min. abgesunken ist, nur noch gering; sie hängt natürlich noch von der Querschnittsbelastung ab. Die untere Grenze für U ist etwa 87 Min.

4. Beispiele für den Einfluß des Luftwiderstandes

Fig. 41 zeigte ja bereits den allgemeinen Verlauf der Bahnelemente p und e vom Start bis zum Absturz. Fig. 47 zeigt den Verlauf von U , e , H_{Fe} , H_{Ap} , V_{Fe} und V_{Ap} für Sputnik II vom Start am 3. 11. 1957 bis kurz vor seinem Absturz am 14. 4. 1958. Fig. 48 gibt außerdem ein Bild der Bahnverhältnisse gegenüber der Erde für diese beiden äußersten Zeitpunkte. Um die Theorie, speziell die Gleichungen (98) und (100) mit der Beobach-

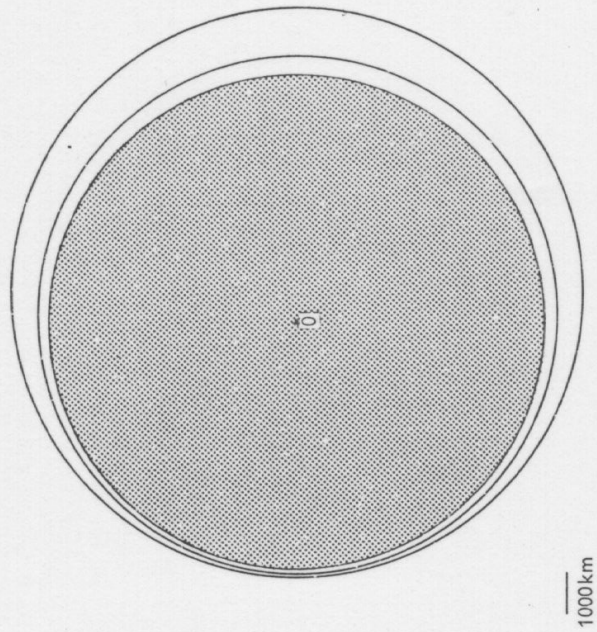


Fig. 48. Anfangs- und Endbahn (kurz vor dem Verglühen in den tieferen Atmosphärenschichten) von Sputnik II, im Vergleich mit der Erde maßstäblich gezeichnet.

tung vergleichen zu können, sind in Tabelle 4 einige Zahlenwerte gegeben, wobei in den Formeln $T_L = 163^d$ gesetzt ist. Wie man sieht, ist die Übereinstimmung recht gut.*

Tabelle 4

Änderung von Umlaufzeit und Exzentrizität bei Sputnik II. Vergleich zwischen Beobachtung und Theorie.

Datum	U Beob. min	U Rechn. min	e Beob.	e Rechn.
1957 Nov. 4	103.7	103.7	0.098	0.098
Dez. 1	102.4	102.4	91	89
1958 Jan. 1	100.7	100.6	81	78
Febr. 1	98.7	98.6	69	65
März 1	96.5	96.4	56	51
März 25	93.8	93.8	40	34
April 9	90.8	90.9	22	16

Für die Anwendung der Formeln (90) bis (96) braucht man den Faktor K . Für Sputnik II war $\frac{m}{Q} = 17.2 \text{ gr/cm}^2$ und mit $C = 2$ erhält man $K = 0.116$.

Es soll zunächst aus (92) die Perigäumsdichte ϱ_0 abgeleitet werden und zwar, um von zeitlichen Schwankungen unabhängiger zu sein, aus der Änderung der Umlaufzeit zwischen 1957 Nov. 8.0 und Dez. 8.3. In dieser Zeit vollführte der Satellit 424 Umläufe. Nachstehende Tabelle enthält U und e sowie die daraus abgeleiteten Werte a , H_{Pe} und H_{Ap} .

Tabelle 5

Änderung der Bahnverhältnisse bei Sputnik II innerhalb von 30 Tagen nach dem Start.

Datum	U min	ΔU min	e	Δe	a km	Δa km	$a \cdot e$ km	H_{Pe} km	$\frac{\partial H_{Pe}}{\partial H_{Ap}}$	H_{Ap} km	ΔH_{Ap} km
8.11.57	103.49		0.0975		7302		712	220		1644	
8.12.57	102.02	-1.47	0.0890	-0.0085	7232	-70	644	218	-2	1506	-138
Mittel	102.75		0.0932		7267		678				

Die Höhen H_{Pe} und H_{Ap} gelten über einem mittleren Erdradius. Für H wird angenommen $H = 40$ km; damit $z = \frac{a}{H} = 678 = 18$. Der Wert

für $\frac{\Delta U}{U}$, der in (92) einzusetzen ist, berechnet sich zu $\frac{\Delta U}{U} = -\frac{1.47}{424 \cdot 102.75} = -3.38 \cdot 10^{-5}$.

Das Ergebnis ist $\varrho_0 = 3.5 \cdot 10^{-13} \text{ gr/cm}^3$.

* Vergl. allerdings die Kurve für U bei Explorer VII in Fig. 49, wo die Variation durch den Tag-Nacht-Effekt im Verlauf der Kurve natürlich nicht durch die Formeln, die ja zeitlich konstante Luftdichte voraussetzen, erfaßt wird.

Setzt man dies in (91) ein - in (90) einzusetzen hat keinen Sinn, da ja (92) aus (90) abgeleitet wurde -, dann erhält man zunächst für einen Umlauf $\Delta e = -1.95 \cdot 10^{-5}$ und für 424 Umläufe $\Delta e = -0.0083$ gegenüber dem beobachteten Wert -0.0085 .

Die Gleichungen (93) und (94) geben:

$$\Delta H_{Pe} = -1.6 \text{ km} \quad \text{und} \quad \Delta H_{Ap} = -137 \text{ km}$$

in guter Übereinstimmung mit den Tabellenwerten. Zur Berechnung von T_L werden in (97) die Mittelwerte eingesetzt:

$$T_L = \frac{3}{4} \cdot 0.0932 \cdot \frac{102.75}{3.38 \cdot 10^{-5} \cdot 1440} = 148^d.$$

Der Faktor 1440 = Zahl der Minuten pro Tag. Da mit den Mittelwerten gerechnet wurde, ist als Ausgangstag für die Zählung von T_L der 23. 11. 57 zu nehmen, so daß als Zeitpunkt des Absturzes der 20. 4. 58, d. h. 6^d zu spät errechnet wird.

Bei Sputnik III kann man die gleichen Rechnungen sowohl für den eigentlichen Satelliten (1958 δ_2) wie auch für die Trägerrakete (1958 δ_1) anstellen. Beide haben praktisch gleiche Anfangswerte $a_0 = 7416 \text{ km}$, $U_0 = 105^m 9$; $e_0 = 0.112$, $H_{Pe} = 224 \text{ km}$, dagegen sehr verschiedene Querschnittsbelastung: Satellit $\frac{m}{Q} = 43$, Rakete $\frac{m}{Q} = 10.5 \text{ gr/cm}^2$. Dement-

sprechend sind die beobachteten Werte für $\frac{\Delta U}{U}$ verschieden: Satellit $-0.85 \cdot 10^{-5}$, Rakete: $-2.7 \cdot 10^{-5}$. Für ϱ_0 erhält man damit $2.3 \cdot 10^{-13}$ bzw. $1.8 \cdot 10^{-13} \text{ gr/cm}^3$, was direkt mit dem Ergebnis von Sputnik II vergleichbar ist, da H_{Pe} beidemal gleich. Als Lebensdauer berechnet man aus diesen Anfangswerten $T_L = 710^d$ bzw. 224^d im Vergleich mit den tatsächlichen Werten 692^d bzw. 202^d .

Am Beispiel von Explorer I (1958x) soll noch gezeigt werden, wie rasch die Bahnänderungen bei größerem H_{Pe} kleiner werden. Tab. 6 enthält die Bahndaten für 2 um $500^d = 6400$ Umläufe auseinanderliegende Zeitpunkte.

Tabelle 6

Änderung der Bahnverhältnisse bei Explorer I innerhalb von 500 Tagen.

Datum	U min	ΔU min	e	Δe	a km	Δa km	$a \cdot e$ km	H_{Pe} km	$\frac{\partial H_{Pe}}{\partial H_{Ap}}$	H_{Ap} km	ΔH_{Ap} km
16.2.58	114.74		0.1386		7822		1084	367		2536	
11.7.59	110.09	-4.65	0.1172	-0.0214	7609	-213	892	347	-20	2131	-405

Außer bei H_{Pe} verlaufen die Änderungen etwa um dem Faktor 5 bis 6 langsamer als während der ersten 30 Tage bei Sputnik II. Rechnet man mit einer Querschnittsbelastung $\frac{m}{Q} = 5.5 \text{ gr/cm}^2$ und $C = 2$, dann findet man für die Perigäumsdichte $\varrho_0 = 1.6 \cdot 10^{-14}$, wobei $H = 60 \text{ km}$ gesetzt wurde. Der Vergleich dieses Wertes ϱ für $H_{Pe} = 357 \text{ km}$ mit dem früher abgeleiteten $\varrho = 2.5 \cdot 10^{-13}$ (Mittel aus Sputnik II und III) für $H_{Pe} = 220 \text{ km}$ erlaubt, einen Mittelwert von H für dieses Höhenintervall zu errechnen:

$$H_e = -\frac{\Delta H}{\Delta \ln \rho} = -0.434 \cdot \frac{\Delta H}{\Delta \log \rho} = 0.434 \cdot \frac{137}{1.20} = 49 \text{ km.}$$

Dieser Wert liegt zwischen den zunächst angenommenen Werten von 40 und 60 km für das untere bzw. obere Niveau.

5. Die Hochatmosphäre auf Grund der Ergebnisse von Satellitenbeobachtungen

Die relativ leicht und sicher zu beobachtende Umlaufzeitverkürzung bei künstlichen Satelliten liefert, wie in 6.3 besprochen, Luftdichtewerte in Abhängigkeit von der Höhe und unter gewissen Annahmen mit Hilfe der Gasgleichung und der Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts (siehe I.4) auch Werte für Druck, Temperatur und Molekulargewicht. Dabei ergab sich als unerwartetes Ergebnis eine wesentlich langsamere Dichteabnahme nach oben als früher angenommen – eine Folge hoher Temperatur der oberen Luftschichten – und außerdem starke zeitliche Schwankungen. Die wichtigsten Ergebnisse sollen hier besprochen werden.

Die Analyse der zeitlichen Variationen auf Grund des umfangreichen Beobachtungsmaterials ließ folgende Effekte erkennen:

- 1) einen Tag-Nacht-Effekt,
- 2) einen Einfluß der Sonnenaktivität,
- 3) einen Effekt mit Jahres- und Halbjahresperiode.

Ein Beispiel für den Tag-Nacht-Effekt zeigt Fig. 49. Die Umlaufzeit von Explorer VII verkürzt sich bei Tag rascher als bei Nacht, d. h. bei Tag ist die Dichte in Perigäumshöhe (555 km) größer als bei Nacht. Die Atmosphäre dehnt sich bei Tag unter der Wirkung der Sonne aus, die Zahl der Moleküle wird in der Höhe größer. Das Maximum der Dichte tritt etwa 2^h nach dem Meridiandurchgang der Sonne ein (um 14^h Ortszeit), das Minimum etwa 4^h nach der lokalen Mitternacht. Diese Verzögerung ist ein Analogon zu der bekannten Tatsache, daß die Extremwerte der Temperatur am Boden gegenüber dem Sonnenstand ebenfalls zeitlich verzögert eintreten. In Höhen unter 200 km ist der Effekt nur klein, z. T. sogar umgekehrt, in 500 km Höhe variiert ρ zwischen Tag und Nacht um den Faktor 3 bis 4 (man vergleiche damit die Verschiedenheit der Kurvenneigung zwischen Tag und Nacht in Fig. 49), in 1000 km um den Faktor 20 und in 1500 km um den Faktor 50 bis 100. Die Feststellung dieses Effektes gelingt nicht etwa dadurch, daß man die Verschiedenheit der Abbremsung beim Durchlaufen des Sonnen- bzw. Schattenteils der Bahn während eines Umlaufs bestimmt – das wäre wegen der Kürze dieser Zeiten zu ungenau –, sondern aus der Verschiedenheit der Abbremsung während des Zeitraumes, da sich das Perigäum auf der Tag- bzw. Nachtseite befindet. Dieser Zeitraum dauert je nach Bahnverhältnissen Wochen oder Monate. Die am oberen Rand von Fig. 49 angegebene Unterteilung in Tag und Nacht ist in diesem Sinne aufzufassen.

Der Einfluß der Sonnenaktivität zeigt sich in einer verstärkten Abbremsung zu Zeiten erhöhter Aktivität. Als Maß für die Sonnenaktivität kann man die Zahl der vorhandenen Sonnenflecken (Fleckenrelativzahl) benutzen oder, was sich als ein sehr guter Indikator erwiesen hat, die Intensität der Sonnenstrahlung im Dezimeterwellengebiet (10 bis 20 cm), wie sie laufend mit Radioteleskopen gemessen wird.

Die eigentliche Ursache für die Dichteschwankung in der Atmosphäre ist allerdings nicht diese Strahlung selbst, sondern der in seiner Intensität ebenfalls variable Ultraviolett- und Korpuskularstrahlanteil der Sonnenstrahlung, der wegen starker Absorption in der Atmosphäre am Erdboden nicht beobachtet werden kann. Fig. 50 zeigt deutlich den Zusammenhang

zwischen der Umlaufzeitänderung $\frac{\Delta U}{U}$ ($= \frac{dP}{dn}$ in der Figur)

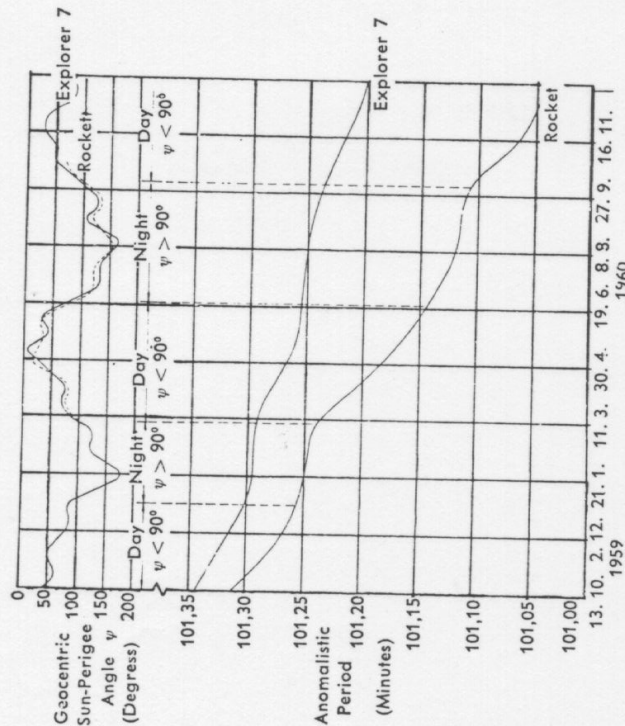


Fig. 49. Umlaufzeit von Explorer VII und seiner Träger Rakete. Die Abnahme infolge Abbremsung in der Atmosphäre erfolgt rascher, wenn das Perigäum auf der Tagseite, langsamer, wenn es auf der Nachtseite liegt. Oben der Winkel zwischen Sonne und Perigäum.

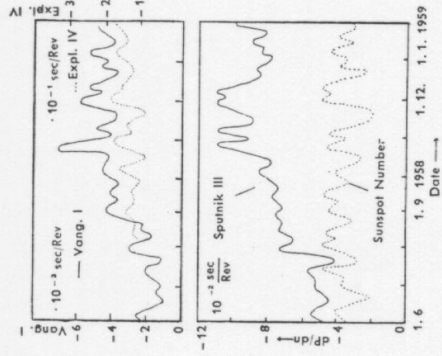


Fig. 50. Umlaufzeitänderung bei 3 Satelliten und ihre Korrelation mit der Sonnenfleckenhäufigkeit.

und der Sonnenfleckenrelativzahl für 3 Satelliten und Fig. 51 läßt die Korrelation zwischen den aus Beobachtungen von Vanguard I abgeleiteten Luftdichten in 660 km Höhe und der Intensität der solaren 20-cm-Strahlung erkennen. Der unruhige Kurvenverlauf bei ϱ ist durch Unsicherheiten in der Bestimmung der Umlaufzeitänderungen, die nur klein sind, bedingt.

Die Dichte schwankt zwischen Maximum und Minimum der Sonnenaktivität in 500 km Höhe etwa um den Faktor 3, in 1000 km Höhe um den Faktor 6 und in 1500 km um den Faktor 10.

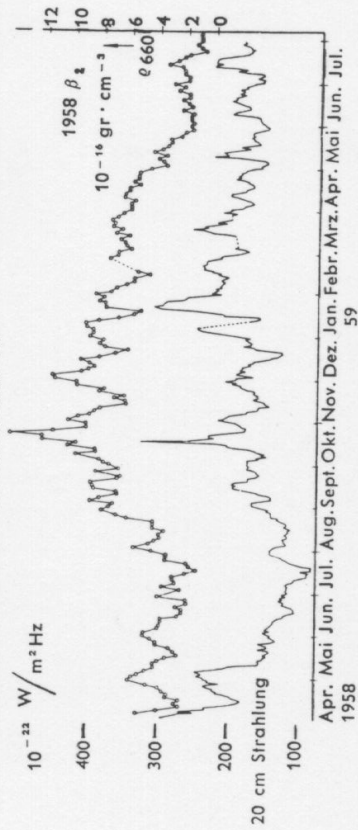


Fig. 51. Korrelation zwischen der 20-cm-Radiation der Sonne und der aus der Abbremsung von Vanguard I errechneten Luftdichte in 660 km Höhe.

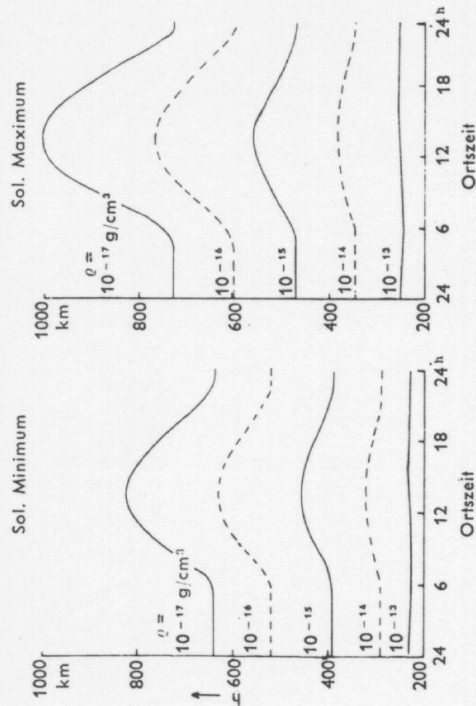


Fig. 52. Höhen gleicher Luftdichte in Abhängigkeit von der Ortszeit bei geringer und starker Sonnenaktivität.

Schließlich gibt Fig. 52 noch ein schematisches Bild der Höhenänderung der Flächen gleicher Dichte infolge des Tag-Nacht-Effekts für die Zeit des Minimums und Maximums der Sonnenaktivität. Die Amplitude des Tag-Nacht-Effekts ist im Maximum größer als im Minimum.

Kurzzeitige verstärkte Abbremsungen treten auch nach starken Sonnenereignissen auf, in deren Gefolge ein mehr oder weniger starker, gebündelter Materiestrom von der Sonne ausgestoßen wird. Trifft diese Materiewolke - es handelt sich um stark ionisiertes Gas, in der Hauptsache Protonen und Elektronen (Plasmawolke), deren Bahnen in Erdnähe durch das irdische Magnetfeld beeinflusst werden - auf die Atmosphäre, so tritt neben Polarlichtern und magnetischen Stürmen auch eine Erwärmung und damit ein Anheben der Schichten gleicher Dichte in der Hochatmosphäre ein. Fig. 53 zeigt die bei 7 Satelliten gleichzeitig beobachteten verstärkten Umlaufzeitänderungen nach zwei Sonneneruptionen am 13. und 16. 11. 1960. Sie stehen in enger Korrelation mit der sog. planetaren erdmagnetischen Kennziffer a_p , die die Störungen der magnetischen Elemente charakterisiert (magnetische Unruhe), während die 10-cm-Wellenstrahlung der Sonne zu diesen Zeitpunkten keine Störung erkennen läßt. Dagegen wurden erwartungsgemäß verstärkte Intensitäten der kosmischen Strahlung, besonders in der Arktis und Antarktis, also in der Gegend der Magnetpole, gemessen.

8 Bohrmann, Bahnen künstlicher Satelliten

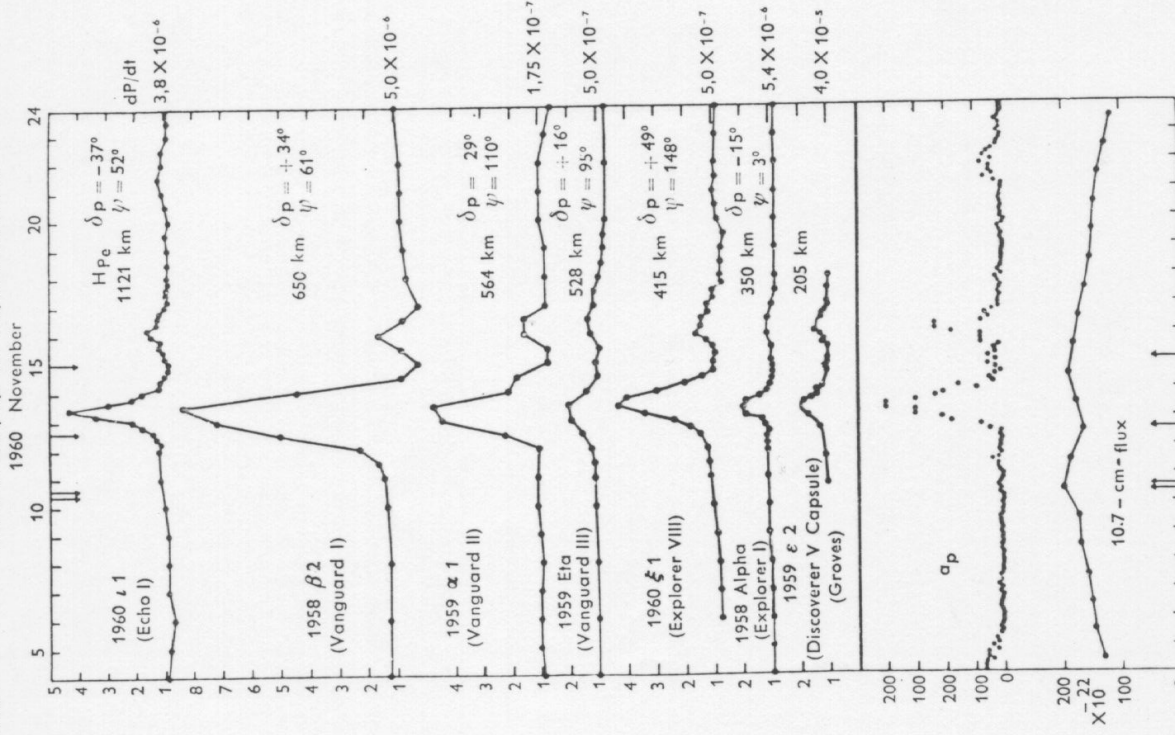


Fig. 53. Gleichzeitig verstärkte Abbremsung (Umlaufzeitänderung) nach zwei Sonnenereignissen Nov. 1961 bei 7 Satelliten mit verschiedenen Perigäumshöhen. Zahlen am linken Rand: Verhältnis der jeweiligen Umlaufzeitänderung zum Mittelwert (= Zahlen am rechten Rand).

Bemerkenswert ist, daß die Satellitenabbremsung unabhängig davon war, ob das Perigäum auf der Tag- oder Nachtseite lag; die Dichteerhöhung trat offenbar auf der ganzen Erde gleichzeitig auf. In der Figur sind nahe dem rechten Rand die Winkel ψ zwischen den Richtungen zur Sonne und Perigäum sowie die Deklination des Perigäums angeschrieben. Für $\psi > 90^\circ$ liegt das Perigäum im Schatten. Die Dichte in 650 km Höhe stieg nach den Beobachtungen bei Vanguard I am 13. 11. auf das 7fache an (siehe Zahlen am linken Bildrand).

Schließlich konnte noch ein Effekt mit ganz- und halbjährlicher Periode festgestellt werden. In Fig. 54 zeigt die untere Kurve den Verlauf von

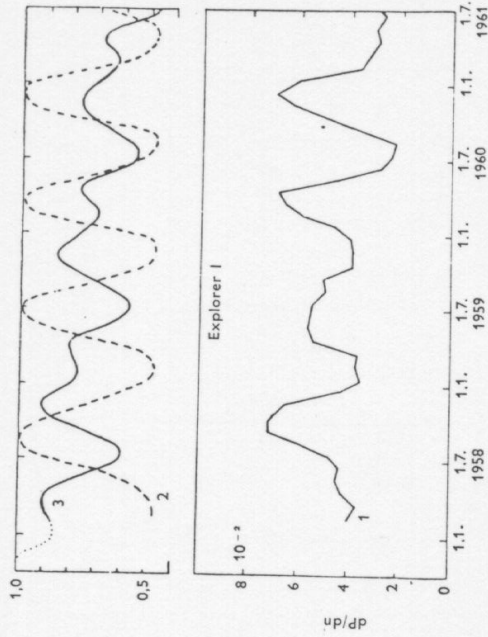


Fig. 54. Umlaufzeitänderung bei Explorer I; Wirkung eines halb- und ganzjährigen Effekts.

$\frac{\Delta U}{U} \left(= \frac{dP}{dn} \right)$ bei Explorer I nach Elimination des Sonnenaktivitätseffekts. Die gestrichelte Kurve 2 oben zeigt den zu erwartenden Anteil des Tag-Nacht-Effekts, der sich in der beobachteten Kurve zwar gut ausprägt, sie allein aber nicht darstellt. Das ist erst der Fall, wenn die Tag-Nacht-Kurve mit der ausgezogenen Kurve 3 kombiniert wird. Die Wellen von Jahres- und Halbjahresperiode ließen sich auch bei andern Satelliten nachweisen. Die Deutung dieses Effektes ist nicht leicht. Wahrscheinlich wird er verursacht durch Wechselwirkung der Exosphäre mit dem interplanetaren Medium, die je nach der Stellung der Erde in ihrer Bahn um die Sonne verschieden ist. Die Dichteveränderung als Folge dieses

Effekts ist charakterisiert durch den Faktor 2 in 500 km, 5 in 1000 km und 6 in 1500 km Höhe.

Im Zusammenwirken aller Effekte kann die Dichteveriation in einer bestimmten Höhe sehr groß werden, prozentual um so größer, je größer die Höhe. Fig. 55 gibt hierfür eine anschauliche Darstellung. Den Unter-

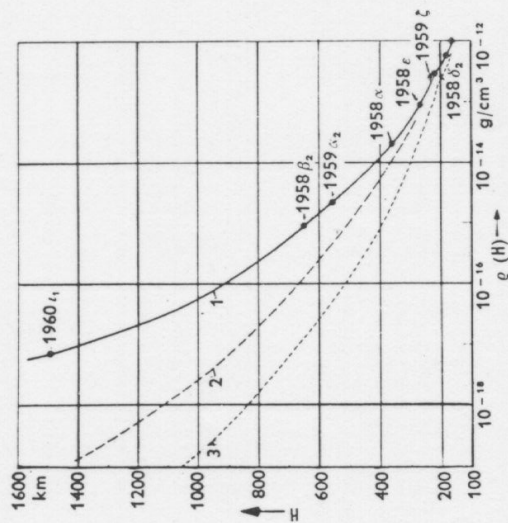


Fig. 55. Die Luftdichte in der Hochatmosphäre. Kurve 1: normalisiert auf die solare Radiostahlung bei $10 \text{ cm von } 200 \cdot 10^{-22} \text{ Watt/m}^2 \text{ Hz}$, den täglichen Höchstwert (14^{h} Ortszeit) und den Mittelwert des jährlichen Effekts. Kurve 2: Normierung auf nächtliche Tiefstwerte (4^{h} Ortszeit), sonst wie Kurve 1. Kurve 3: Normierung auf Minimalwert der solaren Aktivität und des jährlichen Effekts, sonst wie Kurve 2.

schieden zwischen Kurve 1 (maximale Dichte) und Kurve 3 (minimale Dichte) entsprechen in 1000 km Höhe Dichteschwankungen im Verhältnis 440 : 1. Tabelle 1, Seite 21, gibt Zahlenwerte für die beiden Extremfälle.

KAPITEL VII

DIE BAHN DES BALLON-SATELLITEN ECHO I

1. Allgemeines; Beobachtungsergebnisse

Der wegen seiner Helligkeit und guten Sichtbarkeit sehr bekannt gewordene USA-Satellit Echo I (1960 t_1) wurde am 12. 8. 60 in die Bahn gebracht. Er ist nicht nur wegen seiner Größe und seines geringen Gewichts (Durchmesser 30 m, Gewicht 70 kg) sowie der daraus resultierenden geringen Querschnittsbelastung von $\frac{m}{Q} = 0.01$ bemerkenswert, sondern auch wegen seiner großen Höhe von im Mittel 1600 km und wegen des gegenüber andern Satelliten völlig abweichenden Verhaltens seiner Bahn. Fig. 56 zeigt das Verhalten von U , e , H_{Pe} , und H_{Ap} vom Start bis 21. 2. 62. Während U , wie zu erwarten, wegen des Luftwiderstands langsam abnimmt (der große Wert von $\frac{Q}{m}$ bewirkt auch bei der geringen Luftdichte in dieser Höhe eine merkliche Abbremsung), ändert sich e und als Folge davon auch H_{Pe} und H_{Ap} periodisch. Mit einer Periode von rund 3300 variiert e von einem Maximum von 0.08 bis 0, H_{Pe} zwischen 1000 und 1550 km, H_{Ap} zwischen 1550 und 2150 km. Die veränderliche Perigäumshöhe erklärt teilweise die Tatsache, daß U nicht gleichförmig abnimmt: für kleines H_{Pe} muß die Abnahme rascher erfolgen. Außerdem spielt es eine Rolle, ob das Perigäum auf der Tag- oder Nachtseite liegt. Die Änderung von e muß aber ihre Ursache in einer bisher noch nicht berücksichtigten störenden Kraft haben, die sich bei einem Satelliten mit solch ungewöhnlichen Maßen wie Echo I weit stärker auswirkt als bei „kompakteren“ Körpern. Diese störende Kraft wird verursacht durch die auf den Ballon auftreffende Sonnenstrahlung und wird als Strahlungsdruck bezeichnet. Im Mittel über den in Fig. 56 dargestellten Zeitraum nahm a von 7980 km bis 7894 km ab, i war konstant $47^{\circ}25'$; als Wirkung der Erdabplattung nahm Ω um $3^{\circ}15'$ im Mittel pro Tag ab, genau in Übereinstimmung mit Gleichung (68); die Änderung von ω ist aber nicht allein durch die Erdabplattung, sondern auch durch den Strahlungsdruck bedingt (siehe 7.3.).

Nimmt man die in Fig. 56 dargestellte Änderung von e als primär gegeben an, dann erklärt sich der Verlauf von $H_{pe} = a(1 - e) - R$ und $H_{Ap} = a(1 + e) - R$ zwangsläufig.

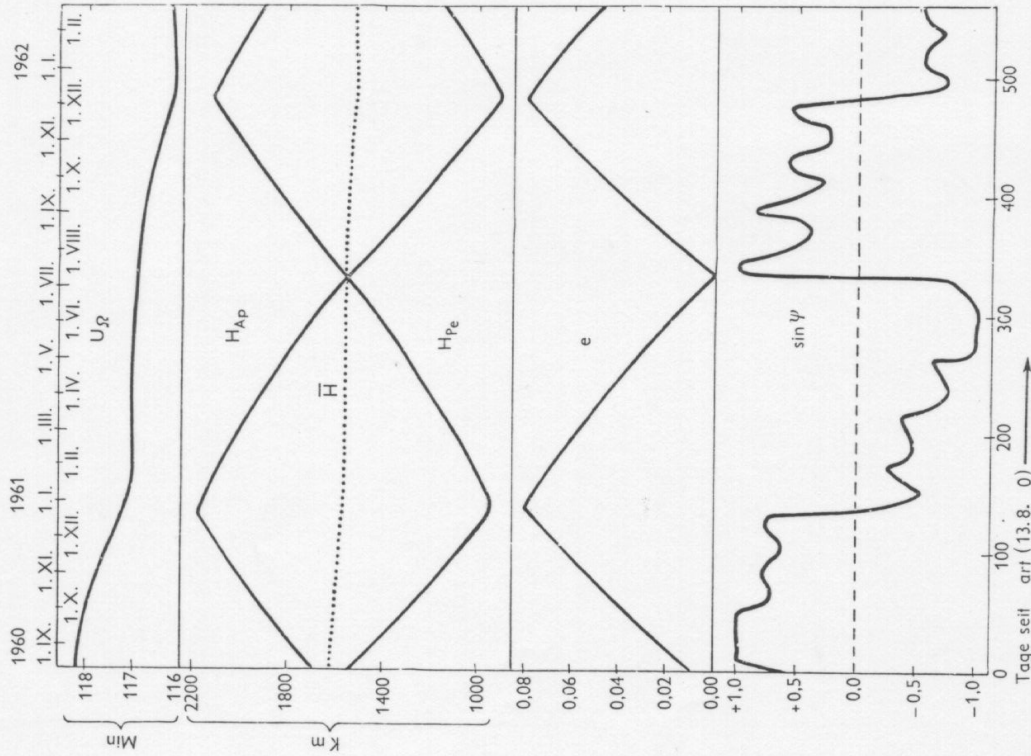


Fig. 56. Unlaufzeit, Exzentrizität, Perigäum- und Apogäumshöhe des Ballon-Satelliten Echo I vom Start bis Febr. 1962. Der Winkel ψ charakterisiert die Lage des Perigäums zur Sonne; die Änderung von e durch den Strahlungsdruck ist proportional zu $\sin \psi$ (untere Kurve; vgl. auch Fig. 57).

2. Der Strahlungsdruck

Die auf eine ebene Fläche fallenden und von dieser entweder absorbierten oder reflektierten Lichtquanten übertragen auf die Fläche einen Impuls in gleicher Weise wie materielle Partikel, da ein Lichtquant der Frequenz ν die Energie $h\nu$ und nach dem Gesetz von der Äquivalenz von Masse und

Energie die Masse $\frac{h\nu}{c^2}$ hat ($h =$ Plancksches Wirkungsquant, $c =$ Lichtgeschwindigkeit). Sei S die gesamte, auf 1 cm^2 der Fläche senkrecht fallende Strahlungsenergie in erg, dann ist bei vollständiger Absorption der pro Zeiteinheit übertragene Impuls $I = Q \frac{S}{c^2} c = Q \frac{S}{c}$. Das ist auch die auf die Fläche in Richtung der auffallenden Strahlung ausgeübte Kraft

oder der Strahlungsdruck in dyn. Bei vollständiger Reflexion kommt der Faktor 2 hinzu. Bei einer Kugel, wie man sie bei Echo I weitgehend voraussetzen kann, ist der Gesamtstrahlungsdruck, unabhängig ob Absorption oder Reflexion, gleich $\frac{\pi r^2 S}{c}$ dyn (siehe auch 6.1). Das Reflexionsvermögen ist wegen des metallischen Belags der Plastikhülle bei Echo I sehr hoch - daher auch seine große Helligkeit.

Es soll zunächst ein Vergleich zwischen der Größe des Luftwiderstands und der des Strahlungsdruckes für die Verhältnisse von Echo I angestellt werden. Bei der mittleren Perigäumshöhe von 1300 km ist die mittlere Luftdichte $\rho = 5 \cdot 10^{-18}$, die Geschwindigkeit $V = 7.3 \text{ km/sec} = 7.3 \cdot 10^5 \text{ cm/sec}$ und also der Luftwiderstand $L = Q \rho V^2 = 2.6 \cdot 10^{-6} \cdot Q$ dyn. Der Strahlungsdruck ist $Q \frac{S}{c}$, wobei $S = 2.0 \text{ cal/cm}^2 \cdot \text{min} = 1.4 \cdot 10^6 \text{ erg/cm}^2 \text{ sec}$ die sogenannte Solarkonstante ist, die Energie der Sonnenstrahlung, die in Erdbstand in der Zeiteinheit senkrecht auf die Flächeneinheit fällt. Damit erhält man für den Strahlungsdruck $p_{st} =$

$$= \frac{1.4 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^{10}} \cdot Q = 5 \cdot 10^{-5} \cdot Q \text{ dyn.}$$

Der Strahlungsdruck ist also rund 20mal so groß wie der Luftwiderstand.

Auch die von der Erde zurückgeworfene Sonnenstrahlung sowie die langwellige Eigenstrahlung der Erde üben einen Druck aus, der aber relativ klein ist.

3. Einfluß des Strahlungsdruckes auf die Bahnelemente

Die durch den Strahlungsdruck verursachte störende Kraft wirkt natürlich immer in Richtung der Sonnenstrahlen. Da die Sonne i. a. nicht in der Bahnebene steht, wird eine Komponente senkrecht zur Bahnebene auf-

treten, die Anlaß zu Änderungen der Bahnlage gibt. Diese erreichen aber keine großen Beträge, da durch die Bewegung der Sonne und die Drehung der Bahnebene die Stellung der Sonne relativ zur Bahnebene ziemlich rasch variiert (siehe z. B. Fig. 22). Es sollen daher hier nur die Komponenten R und S in der Bahnebene berücksichtigt werden. Man kann sich an Hand von Fig. 26 leicht eine qualitative Vorstellung von der Wirkung von S auf die große Halbachse und die Exzentrizität machen. Zu einer Zeit, da die Sonne so steht, daß sie im Perigäum von „hinten“ (in Richtung V) auf den Satelliten scheint, ihm also im Perigäum einen positiven Impuls erteilt, wird der Impuls im Apogäum negativ sein (vorausgesetzt, daß beide Bahnpunkte im Sonnenlicht liegen). Die Wirkung auf a ist dann entgegengesetzt und hebt sich zum mindesten teilweise auf, die auf e ist aber gleichsinnig, und zwar wird in dem angenommenen Fall e größer. Steht die Sonne in entgegengesetzter Richtung zum Perigäum, scheint sie im Perigäum von „vorn“, dann muß e kleiner werden.

Für quantitative Aussagen braucht man Formeln für die Beschleunigungskomponenten R und S .

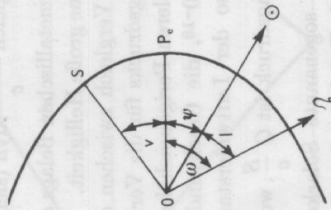


Fig. 57. Zur Berechnung des Einflusses des Strahlungsdrucks auf die Bahnelemente.

In Fig. 57 ist die Papierebene = Bahnebene, die Richtung O ist die Projektion der Richtung nach der Sonne in die Bahnebene. Dann leitet man leicht ab:

$$(101) \quad R = -B \cos b \cos (u - l)$$

$$(102) \quad S = B \cos b \sin (u - l),$$

wobei $B = \frac{Q S}{m c}$ und b und l in 2.8 definiert und aus (23) zu errechnen sind.

Setzt man zunächst in (41) ein, vernachlässigt Glieder mit e^2 , setzt also von vornherein $p = a$, dann folgt nach kurzer Umformung:

$$(103) \quad \frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\sqrt{\mu}} B \cos b \{ \sin (u - l) + e [\cos v \sin (u - l) - \sin v \cos (u - l)] \} = \frac{2a^2}{\sqrt{\mu}} B \cos b \{ \sin (u - l) + e \sin (\omega - l) \}.$$

Zur Integration führt man wieder dv statt dt mit Hilfe des Flächensatzes $r^2 \frac{dv}{dt} = \sqrt{\mu p}$ ein und setzt außerdem $r^2 \approx a^2 (1 - e \cos v)^2 \approx a^2 \cdot (1 - 2e \cos v)$. Bei der Kleinheit von B und, bei Echo I, auch von e , kann man sich die dabei gemachten Vernachlässigungen erlauben. Führt man weiter ein: $u = v + \omega$ und setzt $\omega - l = \psi$, dann erhält man:

$$\frac{da}{dv} = \frac{2a^3}{\mu} B \cos b \{ \sin (v + \psi) + e [\sin \psi - 2 \sin (v + \psi) \cos v] \}.$$

Integriert man unter der Annahme, daß der Satellit nicht in den Erdschatten tritt, über einen ganzen Umlauf und beachtet, daß $\int_0^{2\pi} \sin (v + \psi) \cdot$

$\cos v \, dv = \pi \sin \psi$ ist, dann erkennt man, daß $\frac{da}{\text{Umlauf}} = 0$ ist.

Tritt der Satellit zeitweise in den Erdschatten ein, so hängt das Ergebnis bezüglich der Änderung von a von dem Winkel ψ ab. Es kann sein, daß dann a und damit auch U zu- oder abnimmt, daß also der Satellit durch die Sonnenstrahlung Energie gewinnt oder verliert.

Interessanter ist der Einfluß auf e . Kombination von (42) mit (101) und (102) unter Vernachlässigung von e^2 gibt:

$$(104) \quad \frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} B \cos b \left\{ -\sin v \cos (v + \psi) + \sin (v + \psi) \left[\cos v + \frac{r}{p} (\cos v + e) \right] \right\}.$$

Formt man hier wieder mit Hilfe des Flächensatzes um und vernachlässigt Glieder mit e^2 , dann gelangt man schließlich zu:

$$\begin{aligned} \frac{de}{dv} &= \frac{a^2}{\mu} B \cos b \{ \sin \psi + \cos v \sin (v + \psi) + e [\dots] \} = \\ &= \frac{a^2}{2\mu} B \cos b \{ 3 \sin \psi + \sin (2v + \psi) + e[\dots] \}. \end{aligned}$$

Wird über einen Umlauf integriert, dann verschwindet das erste Glied ohne den Faktor e nicht, im Gegensatz zur Integration von $\frac{da}{dv}$. Darin drückt sich die oben erwähnte Tatsache aus, daß der Strahlungsdruck im Perigäum und Apogäum gleichsinnig auf e einwirkt. Man kann daher auch die Glieder mit e , die in der eckigen Klammer zusammengefaßt sind, in erster Näherung vernachlässigen und erhält nach Integration:

$$(105) \quad \frac{\Delta e}{\text{Umlauf}} = \frac{3\pi a^2}{\mu} B \cos b \sin \psi = \frac{3}{4\pi} U^2 B \cos b \sin \psi.$$

Δe ist immer proportional zu $\sin \psi$, auch wenn der Satellit zeitweise im Erdschatten läuft. Für den einfachen Fall z. B., daß der Satellit gerade auf der Hälfte seiner Bahn im Schatten ist (bei Echo I ist es immer weniger als die Hälfte), hat man zu integrieren von ψ_1 bis $\psi_1 + \pi$ und erhält genau die Hälfte des Wertes von (105). Aus der Definition von ψ folgt, daß für $0 < \psi < 180^\circ$ der Satellit im Perigäum von „hinten“ beschienen wird; Δe ist dann positiv, wie bereits oben gefolgert wurde. In Fig. 56 ist der Verlauf von $\sin \psi$ eingetragen; für $\sin \psi > 0$ ist $\frac{de}{dt} > 0$ und umgekehrt.

Ohne Ableitung soll noch die aus (43) folgende Formel für $\Delta \omega'$, die durch den Strahlungsdruck bewirkte Drehung der Ellipse, angeschrieben werden (wegen der Definition von ψ' siehe 5.5):

$$(106) \quad e \frac{\Delta \omega'}{\text{Umlauf}} = \frac{3U^2}{4\pi a} B \cos b \cos \psi.$$

Wie genau die Beobachtungen durch (105) und (106) dargestellt werden, ist für die ersten 150 Tage nach dem Start in Fig. 58 dargestellt. Für diesen Zeitraum kann man im Mittel annehmen: $a = 7.97 \cdot 10^8$ cm,

$U = 117.9 = 7074$ s. Mit den oben angegebenen Werten von $\frac{Q}{m} = 100$ und $S = 1.4 \cdot 10^6$ erg/cm² sec wird zunächst $B = 5 \cdot 10^{-3}$ cm/sec². Rechnet man Δe und $\Delta \omega'$ gleich pro Tag – die Zahl der Umläufe pro Tag war 12.2 –, dann wird:

$$(107) \quad \frac{\Delta e}{\text{Tag}} = 91 \cdot 10^{-5} \cos b \sin \psi$$

$$(108) \quad \frac{\Delta \omega'}{\text{Tag}} = 0.052 \frac{\cos b \cos \psi}{e}.$$

Um ungefähr dem Einfluß des Durchgangs durch den Erdschatten Rechnung zu tragen, werden die Koeffizienten auf der rechten Seite um 20 % verkleinert. Die Zeit, die der Satellit braucht, um den Erdschatten zu

durchlaufen, schwankt je nach Stellung der Sonne zur Bahnebene und Höhe des Perigäums zwischen 0 und etwa 40 % der Umlaufzeit. Die Koeffizienten sind damit für $e: 73 \cdot 10^{-5}$ und für $\omega': 0.042$. Um den nach (108) berechneten Wert von $\frac{\Delta \omega'}{\text{Tag}}$ mit der Beobachtung vergleichen zu können, muß die durch die Abplattung der Erde bewirkte Änderung von ω hinzuaddiert werden. Sie errechnet sich aus (72) und beträgt $+\frac{3''00}{\text{Tag}}$.

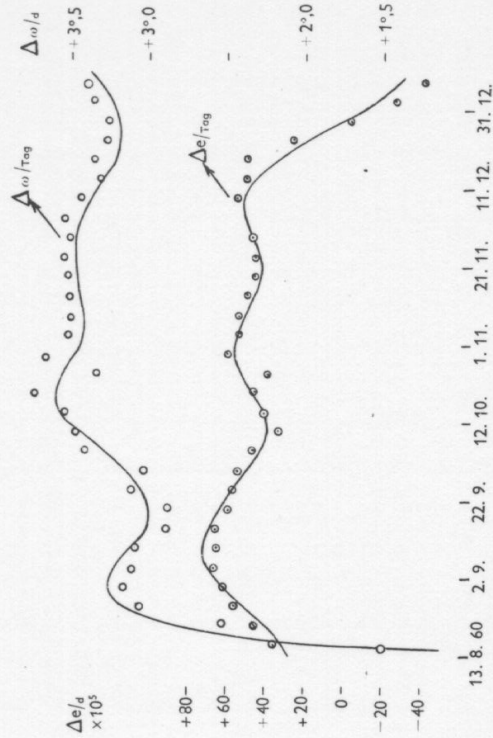


Fig. 58. Änderung der Exzentrizität e und des Arguments ω des Perigäums pro Tag bei Echo I als Folge des Strahlungsdruckes. Kreise: Beobachtung; ausgezogene Kurven: Theorie; Gleichungen 107 und 108.

Bei der Beurteilung der Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Theorie ist natürlich zu beachten, daß der Schatteneffekt nur sehr summarisch berücksichtigt wurde. Der steile Anstieg von $\Delta \omega$ am Anfang des Zeitraums ist durch den Faktor $\frac{1}{e}$ in (108) bedingt. Sehr rasch war

auch die Änderung der Perigäumslage Mitte Juli 1961, als die Exzentrizität bis auf Null abnahm, um dann wieder zuzunehmen, wo also die Bahn durch das „Kreissadium“ hindurch ging. Es ist unschwer zu überlegen, wie die Wirkung des Strahlungsdruckes auf eine Kreisbahn sein wird: an der Stelle seiner Bahn, an der der Satellit von der Sonne wegläuft, erfährt er durch den Strahlungsdruck den größten Impuls in Richtung der Geschwindigkeit. Dieser Punkt wird also Perigäum werden. Da die Bahn von

diesem Zeitpunkt an wieder exzentrisch wird, andererseits die große Halbachse praktisch konstant bleibt und der Erdmittelpunkt stets Brennpunkt ist, muß das Perigäum tiefer sinken. Umgekehrt muß vor dem Stadium der Kreisbahn das Apogäum tiefer sinken (siehe Fig. 56). Im Augenblick der Kreisbahn geht das Apogäum in das Perigäum über und umgekehrt. Bei Echo I war die Richtung des „neuen“ Perigäums fast senkrecht zur Richtung zur Sonne, $\psi = \omega - l \approx 90^\circ$, wie zu erwarten.

Sehr interessant können die Fälle werden, bei denen sich die große Achse der Bahn infolge der Erdbabplattung gegenüber einer festen Richtung gerade so viel dreht, daß die Rektaszension des Perigäums im Mittel um 1° pro Tag zunimmt, d. h. ebenso viel wie die Rektaszension der Sonne, so daß die Lage des Perigäums zur Richtung der Sonnenstrahlen stets gleich bleibt. Ein einfaches Beispiel für einen solchen „Resonanzfall“: ein Satellit werde am Äquator mit $i = 0$ nach Osten abgeschossen in eine Bahn mit

$$\frac{a}{R} = 1.93. \text{ Für diesen Satelliten ist infolge der Erdbabplattung } \Delta\Omega = -1^\circ 00,$$

$\Delta\omega = +2^\circ 00$, so daß sich das Perigäum gegenüber einer festen Richtung um $1^\circ 00$ pro Tag nach Osten verlagert, genau wie die Sonne (genauer $0^\circ 986$). Erfolgt der Abschub bei Sonnenaufgang und ist der Punkt des Brennschlusses Perigäum, dann wird e zunächst abnehmen, H_{Pe} wird zunehmen, bis $e = 0$ geworden ist. Von diesem Zeitpunkt an wird e zunehmen; das Perigäum, das jetzt, bezogen auf die Sonne, auf der entgegengesetzten Seite liegt, sinkt tiefer, so daß der Satellit nach einer gewissen Zeit zum Absturz kommt, da in den tiefer gelegenen Atmosphärenschichten der Luftwiderstand überwiegt. Erfolgt aber der Abschub unter sonst gleichen Bedingungen bei Sonnenuntergang, dann sinkt das Perigäum sofort tiefer, die Lebensdauer des Satelliten wird wesentlich kürzer sein. Bei Echo I liegt dieser Resonanzfall nicht vor. Die Richtung zum Perigäum verlagert sich langsam gegenüber der zur Sonne. Die Verhältnisse sind dabei komplizierter, einmal weil $i \neq 0$ ist und außerdem weil der Strah-

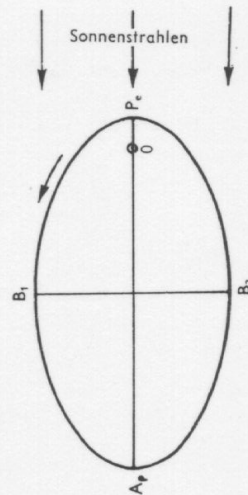


Fig. 59. Zur Drehung der Bahnellipse als Folge des Strahlungsdrucks.

lungsdruck die Perigäumsrichtung ebenfalls ändert. Man beachte hierzu den Verlauf von $\sin \psi$ in Fig. 56.

Nach (106) ist $\Delta\omega'$ am größten für $\psi = 0$. In Fig. 59 ist dieser spezielle Fall dargestellt. Aus der Symmetrie der Figur möchte man zunächst schließen, daß der Einfluß des Strahlungsdruckes sich während eines Umlaufs annullieren würde, da seine Richtung im oberen Bahnteil, bezogen auf den Geschwindigkeitsvektor, genau entgegengesetzt zu der im unteren Bahnteil ist. Tatsächlich ist auch die Impulsübertragung in symmetrisch gelegenen Punkten oben und unten genau entgegengesetzt gleich, ihr Einfluß auf die Drehung der Ellipse aber gleichsinnig, wie aus der Betrachtung in 3.4 im Anschluß an Fig. 26 folgt. Auch im Perigäum und Apogäum wirkt der Strahlungsdruck im gleichen Sinn; man vergleiche die Überlegungen zu Fig. 40.

Fig. 60 zeigt noch die Ergebnisse einer Analyse der Perigäumshöhen von Vanguard I. Die Ringe sind die Beobachtungswerte; Kurve A ist nach der

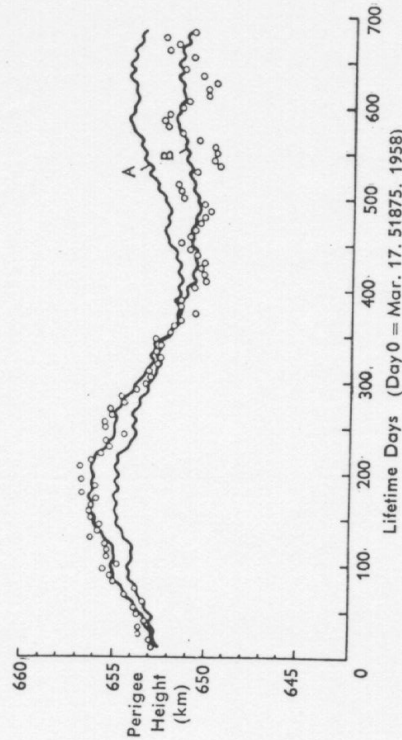


Fig. 60. Schwankungen der Perigäumshöhe von Vanguard I. Kreise: Beobachtung; Kurve A: Theorie unter Berücksichtigung der Störungen durch Sonne und Mond; Kurve B: Theorie nach zusätzlicher Berücksichtigung des Strahlungsdruckes.

Theorie zu erwarten, wenn die Bahnstörungen durch die Gravitationseinflüsse von Sonne und Mond berücksichtigt werden, Kurve B nach zusätzlicher Berücksichtigung des solaren Strahlungsdruckes. Dieser hat einen wesentlich geringeren Einfluß als bei Echo I wegen des sehr viel kleineren $\frac{Q}{m}$. Selbstverständlich erleidet die Bahn von Echo I auch Störungen

durch die Anziehung von Sonne und Mond, die bei genauer Analyse der Bahn berücksichtigt werden müssen; sie sind aber klein, verglichen mit den Störungen durch den Strahlungsdruck. Bei diesem Vergleich ergibt sich übrigens ein scheinbares Paradoxon. Die Beschleunigung, die Echo I durch den Strahlungsdruck erfährt, ist $B_S = 5 \cdot 10^{-3}$ cm/sec². Die Beschleunigung infolge der Anziehung der Sonne berechnet sich nach dem

Gravitationsgesetz aus $B_G = G \frac{M_{\odot}}{r^2}$, wobei $G = 6.67 \cdot 10^{-8}$ cm³/gr · sec²,

$M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33}$ gr und $r = 1.50 \cdot 10^{13}$ cm ist. Man erhält $B_G = 0.6$ cm/sec², also einen rund 100mal so großen Wert. Das scheint in krasssem Widerspruch zu stehen zu den Wirkungen! Der Widerspruch erklärt sich, wenn man bedenkt, daß die Gravitationsbeschleunigung, die die Erde durch die Sonne erfährt, im zeitlichen Mittel ebenso groß ist wie die von Echo I, daß also die Bahn von Echo I um die Erde durch die Gravitation der Sonne nur dadurch gestört wird, daß sein Abstand von der Sonne teils kleiner, teils größer ist als der der Erde. Diese Unterschiede sind aber relativ sehr klein – rund 7000 km gegen 150 Mill. km. Die durch den Strahlungsdruck der Sonne verursachte Beschleunigung der Erde ist aber wegen der großen Erdmasse ($6 \cdot 10^{27}$ gr) verschwindend klein und beträgt nur $3 \cdot 10^{-15}$ cm/sec², d. h. nur das $6 \cdot 10^{-13}$ fache der von Echo I.

KAPITEL VIII

BEOBSACHTUNGEN UND BAHNBESTIMMUNG

1. Optische Beobachtungen; Helligkeit eines Satelliten

Visuelle oder photographische Beobachtungen lassen sich nur unter günstigen Sichtbedingungen – klarer Himmel, genügende Dunkelheit, Satellit nicht im Erdschatten – machen, was sich auf die Gewinnung regelmäßiger, systematischer Beobachtungen, etwa zur Bestimmung der Umlaufzeitänderung infolge Abbremsung, ungünstig auswirkt.

Zu direkten visuellen Beobachtungen eignet sich ein theodolitähnliches Fernrohr, etwa ein Ballon-Theodolit, wie er in der Meteorologie zur Verfolgung von Wetterballonen benutzt wird. Im Augenblick des Durchgangs des Satelliten durch das Fadenkreuz werden Azimut und Höhe an den Teilkreisen des Instruments abgelesen (bzw. die Kreise photographiert). Die dabei erreichte Genauigkeit beträgt einige wenige Bogenminuten. Vorteilhafter ist die photographische Methode, bei der man auf dem Film

Bilder von Sternen und die Satellitenspur hat. Diese muß durch zeitlich genau fixierte kurze Unterbrechungen der Belichtung ebenfalls unterbrochen werden. Die Lage dieser Unterbrechungen auf dem Film wird durch Ausmessung gegenüber benachbarten Sternen bestimmt und liefert Rektaszension und Deklination des Satelliten für den jeweiligen Zeitpunkt der Unterbrechung (siehe Fig. 61). Bei lichtschwachen Satelliten wird die Kamera auf Grund der vorausberechneten Bewegung des Satelliten am Himmel diesem nachgeführt, so daß sein Bild punktförmig wird, die Sterne aber Strichspuren mit Unterbrechungen geben. Will man die bei der Ausmessung eines Films erreichbare Genauigkeit der Ortsbestimmung von einigen Bogensekunden voll ausnutzen, dann bedarf es allerdings sehr genauer Zeitbestimmungen. Ein Satellit, der in 400 km Höhe bei einem $V = 7,5$ km/sec durch das Zenit geht, ändert seinen Ort für den Beobachter um rund 1° pro Zeitekunde, d. h. um $4''$ in 10^{-3} sec. Um also die Genauigkeit der Messungen auszunutzen – für gewisse geodätische und geophysikalische Untersuchungen ist das erwünscht –, müssen die absoluten Zeitmomente der Unterbrechungen auf $\frac{1}{1000}$ sec. genau fest-

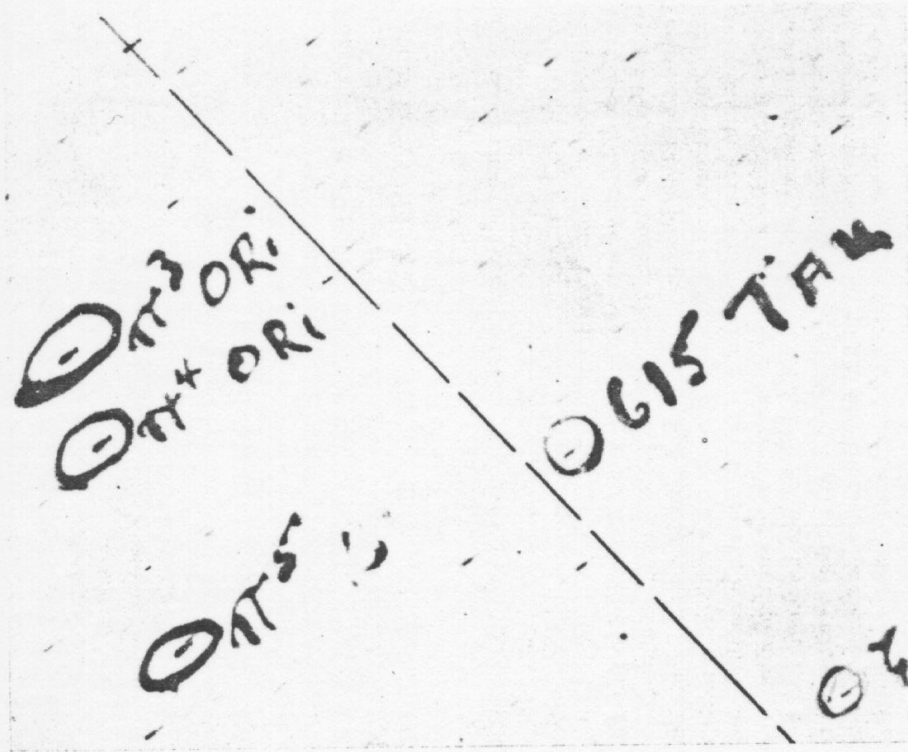


Fig. 61. Strichspuren von Sputnik II mit Unterbrechungen als Zeitmarken und Sternspuren von Sternen der Sternbilder Orion (Ori) und Stier (Tan).

gelegt werden, was selbst bei vollautomatischer Steuerung des Kameraschlusses durch eine Quarzuhr schwierig ist. Auf diese Weise gewinnt man während eines Durchgangs in rascher Folge, etwa im Zeitintervall von je 1 sec., eine große Zahl von Positionen an einer Beobachtungsstation.

Fig. 62 zeigt eine der zwölf von den USA in verschiedenen Gegenden der Erde eingesetzten sog. Baker-Nunn-Kameras (Öffnung 50 cm, Öffnungs-

verhältnis 1 : 1). Mit diesen Super-Schmidt-Kameras lassen sich auch sehr lichtschwache Satelliten fotografieren, bis zu einer Helligkeit, die einem Stern 12. Größe entspricht.

Die Helligkeit eines Satelliten wird in dem in der Astronomie üblichen Größenklassensystem angegeben. Es ist dies eine logarithmische Skala, und zwar ist die Beziehung zwischen dem Größenklassenunterschied

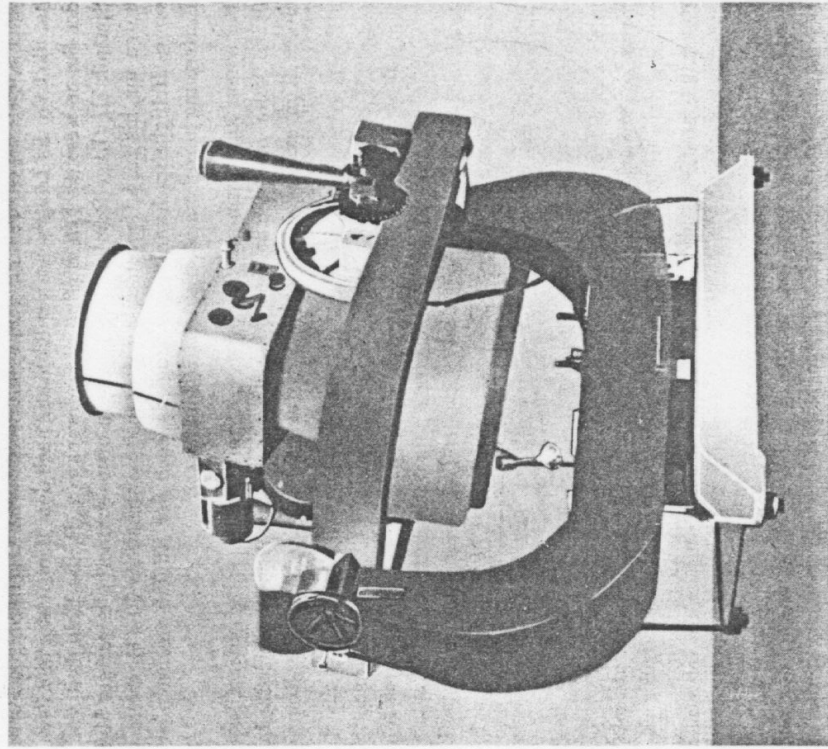


Fig. 62. Baker-Nunn-Kamera zur photographischen Beobachtung von Satelliten.

$m_2 - m_1$ zum Intensitätsverhältnis $\frac{J_2}{J_1}$ zweier Lichtquellen definiert durch die Gleichung

$$m_2 - m_1 = 2,50 \log \frac{J_1}{J_2}.$$

Die Helligkeit, in der ein Satellit dem Beobachter erscheint, hängt von seiner Größe, Form, Entfernung, Stellung zur Sonne und vom Reflexionsvermögen seiner Oberfläche ab. Am einfachsten sind die Verhältnisse bei einer Kugel; bei einer länglichen, zylindrischen oder kegelförmigen Form hat die Lage der Längsachse zur Richtung nach dem Beobachter und nach der Sonne wesentlichen Einfluß. So schwankte z. B. die Helligkeit von Sputnik III (Kegelform) infolge Rotation oftmals innerhalb weniger Minuten um bis zu 4 Größenklassen (Intensitätsverhältnis 40 : 1), die gesamte Helligkeitsschwankung betrug, da noch der Einfluß wechselnder Entfernung hinzukommt, bis zu 8 Größenklassen.

Bei einem kegelförmigen Satelliten mit vollkommen spiegelnder Oberfläche kann man leicht eine Abschätzung der Helligkeit machen. In einem Konvexspiegel entsteht ein virtuelles Bild der Sonne im Brenn-

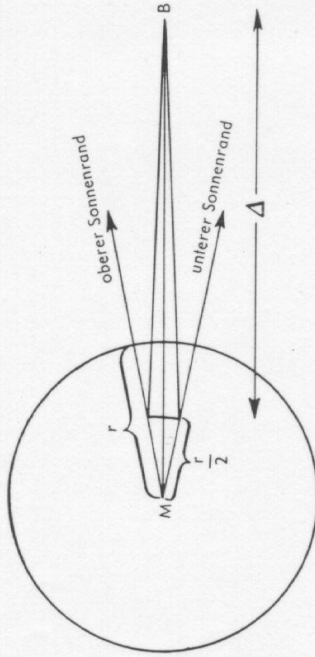


Fig. 63. Zur Berechnung der Helligkeit eines kegelförmigen Satelliten mit spiegelnder Oberfläche.

punkt, also halbwegs zwischen Oberfläche und Mittelpunkt. Ist r der Radius der Satellitenkugel, r_0 der Halbmesser der Sonnenscheibe in absolutem Bogenmaß, dann ist der Radius des virtuellen Bildes $\varrho = \frac{r}{2} r_0$. Vom Beobachter aus gesehen erscheint ϱ unter dem Winkel $\frac{\varrho}{\Delta}$, und das Verhältnis dieses Winkels zum scheinbaren Sonnenradius beträgt mit-

hin $\frac{r}{2\Delta}$. Die Raumwinkel, unter denen die Fläche des virtuellen Bildes und die der Sonnenscheibe vom Beobachter aus erscheinen, stehen also im Verhältnis $\left(\frac{r}{2\Delta}\right)^2$. Beim Fehlen irgendwelcher Reflexionsverluste (Absorption, diffuse Reflexion) ist dies auch das Intensitätsverhältnis von Satellitenstrahlung zur Sonnenstrahlung für den Beobachter (es ist dabei angenehmer, daß Δ klein ist gegenüber der Entfernung der Sonne, die Intensität der Sonnenstrahlung für Erde und Satellit also gleich ist). Die Größenklassendifferenz zwischen Sonne und Satellit wird dann sein:

$$m_{\text{sat}} - m_{\odot} = 2,50 \cdot \log \left(\frac{2\Delta}{r}\right)^2.$$

Mit $m = -26,8$ (visuell; photographisch $-26,4$) hat man schließlich:

$$(109) \quad m_{\text{sat}} = -25,3 + 5 \log \frac{\Delta}{r}.$$

Die Formel gilt streng genommen nur für den in Fig. 61 dargestellten Fall, daß Sonne, Beobachter und Satellit in einer Geraden stehen. Steht der Beobachter seitlich der Verbindungslinie Sonne-Satellit, ist der Winkel am Satelliten zwischen der Richtung zur Sonne und zum Beobachter, der sog. Phasenwinkel, nicht Null, dann wird die Helligkeit kleiner sein (es wäre dann noch ein „Phasenkoeffizient“ zu berücksichtigen). Gleichung (109) gibt also maximale Helligkeiten.

Rechnet man hiernach die Helligkeit von Echo I aus, dann ist $r = 15$ m, $\Delta = 1500$ km $= 15 \cdot 10^5$ m (in mittlerem Abstand über dem Beobachter), also $\frac{\Delta}{r} = 10^5$ und man erhält $m = -0,3$. Tatsächlich ist die Helligkeit von Echo I etwas geringer, zwischen 0ter und +1ter Größe. Der kleine Satellit Vanguard I ist eine Kugel von nur 8 cm Radius. Seine kleinste Distanz ist 650 km und das liefert $m = 10,0$, also sehr schwach; die schwächsten, für gute Augen noch direkt sichtbaren Sterne haben $m = 6$. Für nicht kegelförmige Satelliten erhält man aus (109) einen ungefähren Wert für m , wenn man für r eine mittlere Dimension einsetzt. Bei größeren Zenitdistanzen muß noch die Extinktion des Lichts in der Atmosphäre berücksichtigt werden.

2. Radiobeobachtungen; Richtungsmessungen

Es handelt sich dabei um den Empfang der Kurzwellenstrahlung, die von einem im Satelliten eingebauten Sender ausgestrahlt wird. Prinzipiell ist zu diesen Beobachtungen zu sagen, daß sie gegenüber den optischen Messungen den großen Vorzug der Unabhängigkeit von Tag-

und Nachtzeit und vom Wetter haben, also häufiger und systematischer angestellt werden können. Das ist besonders wertvoll, wenn es sich darum handelt, aus der Umlaufzeitänderung Aufschlüsse über die Atmosphäre, besonders über kurzperiodische Schwankungen zu gewinnen. Dabei kann man den Verlust an Genauigkeit gegenüber den optischen Methoden in Kauf nehmen. Auch für erste Bahnbestimmungen nach dem Abschluß ist man wesentlich auf solche Messungen angewiesen. Fig. 64 zeigt z. B. das Ergebnis von Azimutmessungen während eines

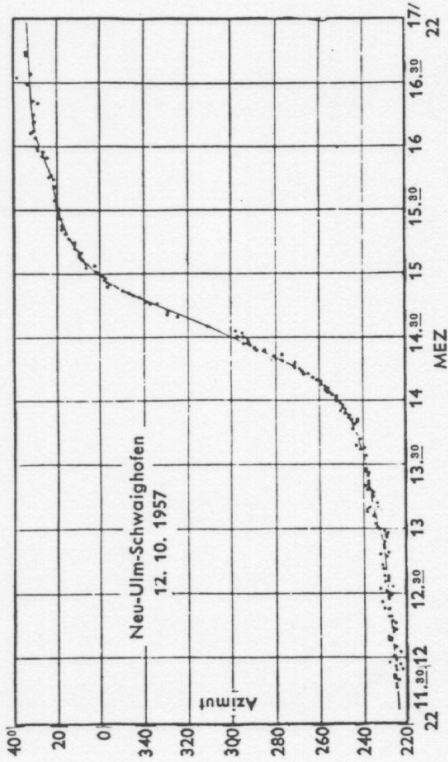


Fig. 64. Azimutmessungen durch Funkpeilung während eines nahen Vorübergangs von Sputnik I (20 MHz).

Durchgangs von Sputnik I, wie sie mit einer Richt-(Peil-)Antenne gemacht wurden. Auch wenn die Einzelwerte des Azimuts nicht sehr genau sind, läßt sich aus der Kurve der Zeitpunkt der größten Annäherung des Satelliten an den Beobachtungsort als der Zeitpunkt der raschesten Änderung des Azimuts sowie die Azimutrichtung nach dem nächsten Bahnpunkt recht sicher ablesen. Aus den Werten für aufeinanderfolgende Durchgänge kann die Umlaufzeit bestimmt werden. Genauere Richtungsangaben gewinnt man mit einer Empfangsanlage bei der zwei gleiche, in mehr oder weniger großem, genau bekanntem Abstand und in genau bekannter Richtung zueinander aufgestellte Antennen oder Antennensysteme die Satellitensignale empfangen. Ist (Fig. 65) D der Abstand der beiden Antennen A und B , α der Winkel, den die Richtung der ankommenden Wellen mit der Verbindungslinie AB bildet, dann kommen die Wellen mit einer Phasendifferenz in A gegenüber B an, die dem Wegunterschied $AC = D \cos \alpha$ entspricht. Werden die beiden in A und B aufgenommenen Signale einem gemein-

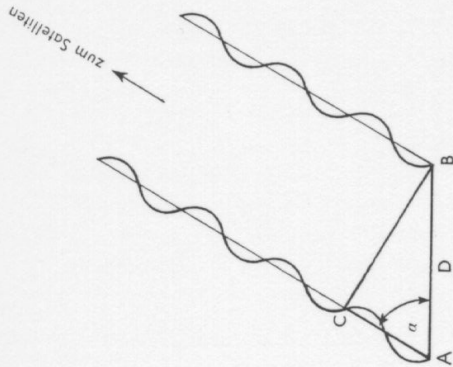


Fig. 65. Schema der Richtungsmessung mittels einer Interferometeranordnung durch Empfang der Kurzwellensignale eines Satelliten an zwei Stationen.

samen Verstärker zugeführt, so werden sie sich summieren, falls $D \cos \alpha = n \cdot \lambda$ mit $n = 0, 1, 2 \dots$ ist, und sie werden sich gegenseitig auslöschen für $D \cdot \cos \alpha = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda$, wobei λ die Wellenlänge der Strahlung ist. Durch die Bewegung des Satelliten ändert sich der Winkel α und man erhält abwechselnd Maxima und Minima, wenn die Empfangsstärke als Funktion der Zeit registriert wird. Wieviele solcher Maxima und Minima registriert werden, hängt von der (Winkel-)Breite der Empfangscharakteristik der Einzelantennen ab.

Es handelt sich hier also um eine Bestimmung des Winkels α in Abhängigkeit von der Zeit mit Hilfe einer Interferenzenanordnung. Dabei tritt bei Benutzung von nur einer Basis eine Mehrdeutigkeit auf in der Wahl des Wertes n für ein bestimmtes Maximum bzw. Minimum. Diese kann beseitigt werden durch die zusätzliche Benutzung einer zweiten Basis in gleicher Richtung, aber mit anderem D . Um eine vollständige Richtungsangabe zu gewinnen, wird eine weitere Basis, etwa senkrecht zur Richtung der ersten, ebenfalls in zwei verschiedenen Längen, benötigt. Fig. 66 zeigt eine schematische Darstellung der Anordnung von insgesamt 8 Antennen in einer von den USA benutzten sog. Minitrack-Station.

In Ost-West-Richtung sind 2 verschiedene Basislängen $D = 54,7 \lambda$ und $D = 7 \lambda$, in Nord-Süd-Richtung außerdem noch eine sehr kurze Basis von $D = 1,318 \lambda$ ($N-S$ coarse in Figur) benutzt. Bei der von den USA-

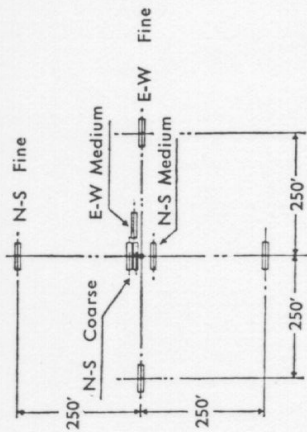


Fig. 66. Räumliche Anordnung von 8 Antennen bei den Minitrack-Stationen der USA.

Satelliten ausgestrahlten Frequenz von 108 MHz, $\lambda = 2.78$ m, hat die große Basis eine Länge von 152 m (= 500 Fuß). Bei einem in Richtung West-Ost über die Station laufenden Satelliten entspricht dem zeitlichen Abstand zweier aufeinanderfolgender Maxima (oder Minima) eine Änderung von $\cos \alpha$ um den Betrag $\frac{\lambda}{D}$, also von $\frac{1}{54.7}$ mit den obigen Zahlenwerten für die große Basis. Wenn α in der Nähe von 90° ist, entspricht dies einer Winkeländerung von $\frac{1}{54.7}$ Radian = 1.05 (1 Radian = 57.30). Ist die Registrierung gut, sind die Maxima scharf ausgebildet, dann ist es möglich, ihre Zeiten mit einer Genauigkeit von etwa 5% des Abstandes zweier aufeinanderfolgender Maxima zu fixieren, d. h. den Winkel α mit einer Genauigkeit von etwa $0.05 = 3'$ zu bestimmen. Mit der Basislänge wächst auch die Genauigkeit.

Mit einer Herabsetzung dieser theoretisch erreichbaren Genauigkeit muß man allerdings wegen der Strahlenbrechung (Refraktion) rechnen: Strahlung in diesem Frequenzbereich erleidet beim Durchgang durch die Ionosphäre eine Brechung, die proportional zur Elektronenkonzentration in der durchlaufenen Schicht ist. Diese ist aber nicht immer genügend genau bekannt, da sie zeitlichen und örtlichen Schwankungen unterworfen ist*. Die Strahlenablenkung ist außerdem proportional zu $\tan i$, wobei i = Einfallswinkel (dies gilt auch im optischen Bereich, d. h. sie ist Null im Zenit und nimmt mit wachsender Zenitdistanz rasch zu) und umgekehrt proportional zum Quadrat der Frequenz. Daher ist der Einfluß der Ionosphäre bei den russischen Satelliten mit den Frequenzen

* Ein Maß für die Elektronendichte liefert die an vielen Orten der Erde laufend gemessene sog. Grenzfrequenz. Wellen, deren Frequenz kleiner ist als die jeweilige Grenzfrequenz, werden in der Ionosphäre reflektiert.

20 und 40 MHz wesentlich größer als bei den amerikanischen mit 108 MHz. Andererseits geben gerade diese Effekte wertvolle Aufschlüsse über die Ionosphäre.

Die USA unterhalten ein System von 14 Minitrack-Stationen, von denen 11 über den amerikanischen Kontinent von Alaska bis Chile verteilt sind; die andern sind in England, Südafrika und Australien. Siehe Fig. 67.

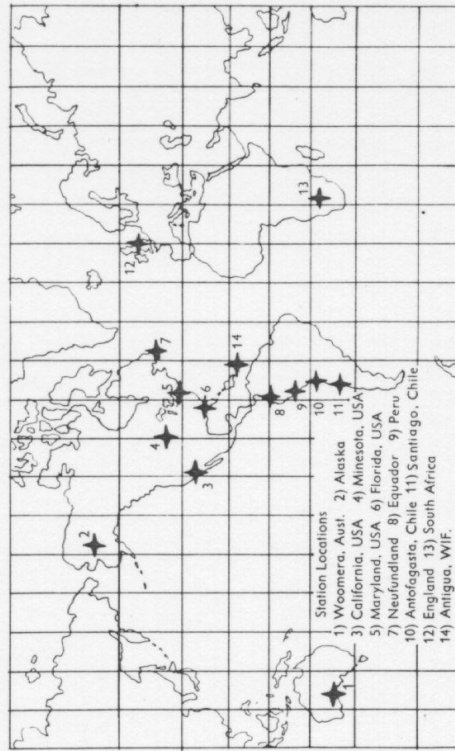


Fig. 67. Verteilung der USA-Minitrack-Stationen zur Radiobeobachtung von Satelliten.

Da es sich bei Messungen mit einer festen Basis im wesentlichen um die Bestimmung des Zeitpunktes des mittleren Maximums in der Registrierung der Interferenz-Figur handelt, das dem Zeitpunkt entspricht, zu dem der Satellit durch die Mittelebene der Basis geht, kann man solche Beobachtungen auch als Durchgangsbeobachtungen bezeichnen, analog denen, wie sie in der Astronomie etwa mit Meridianinstrumenten an Sternen ausgeführt werden. Bei einer Ost-West-Basis wird also die Zeit des Meridiandurchgangs gemessen.

3. Messungen des Dopplereffekts

Die von einem Satelliten ausgehende Strahlung habe die Frequenz f_0 . Ein Beobachter wird aber eine größere Frequenz der bei ihm ankommenden Wellen messen, wenn der Satellit sich ihm nähert und eine kleinere, wenn er sich von ihm entfernt. Da die Geschwindigkeit der Satelliten groß ist, sind auch die durch diesen Dopplereffekt bewirkten Frequenzänderungen gut meßbar. In Fig. 68 ist der einfache Fall einer gerad-



Fig. 68. Zur Messung des Dopplereffektes beim Empfang der Kurzwellensignale eines Satelliten.

linigen Bewegung des Satelliten gezeichnet. Der Beobachter B mißt eine Frequenz f , wobei

$$(110) \quad f = f_0 - f_0 \frac{V \cos \theta}{c} = f_0 - f_0 \frac{V_R}{c};$$

$V_R = \frac{d\Delta}{dt}$ wird auch Radialgeschwindigkeit genannt; c ist die Lichtgeschwindigkeit. (Dabei ist angenommen, daß die in Richtung Δ fallende Komponente der Geschwindigkeit der Erdrotation in Abzug gebracht ist.) In dieser Form gilt die Gleichung allerdings streng nur für die Wellenausbreitung im Vakuum. Beim Durchlaufen ionosphärischer Schichten tritt ebenfalls eine Modifikation ein. Ihre Berücksichtigung ist wegen der wechselnden Verhältnisse in der Ionosphäre nicht immer in aller Strenge möglich. Aus Fig. 68 leitet man für $V = \text{const ab:}$

$$V_R = V^2 \frac{t - t_0}{\Delta},$$

wobei t_0 der Zeitpunkt der kleinsten Distanz Δ_0 von B ist. Trägt man V_R oder $f - f_0$ als Funktion von t auf, dann erhält man Kurven von der Art wie in Fig. 69.

Sie haben alle eine mehr oder weniger steile Wendetangente im Zeitpunkt t_0 , da $\frac{dV_R}{dt} = \frac{V^2}{\Delta}$ ein Maximum für $\Delta = \Delta_0$ hat. Je kleiner Δ_0 , desto steiler die Wendetangente. Auf diese Weise läßt sich der Zeitpunkt des kleinsten Abstandes vom Beobachtungsort bestimmen. Aus der Beobachtung aufeinanderfolgender Durchgänge kann dann die Umlaufzeit errechnet werden und durch Kombination der Beobachtungen des gleichen Durchgangs an mehreren, um einige hundert Kilometer auseinander liegenden Orten die übrigen Bahnelemente. Für genaue Auswertung der Messungen muß natürlich die Krümmung der Bahn berücksichtigt werden.

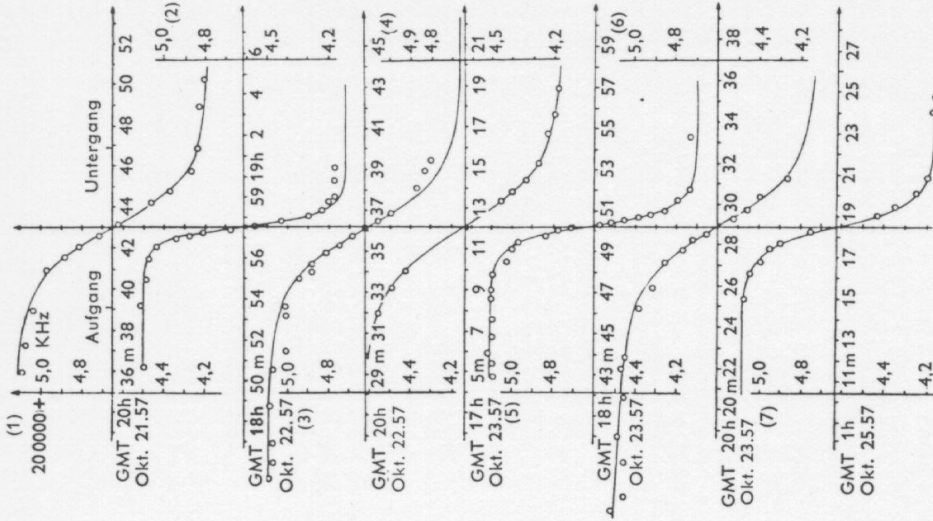


Fig. 69. Einige der ersten in Deutschland (Bonn) gewonnenen Dopplereffektkurven von Sputnik I. Der Wendepunkt entspricht dem Zeitpunkt der größten Annäherung an die Empfangsstation; die Wendetangente ist um so steiler, je näher der Vorübergang.

In Fig. 69 sind zwei Zeitpunkte mit Aufgang bzw. Untergang markiert. Sie entsprechen den Zeiten, zu denen Sputnik I im Horizont des Beobachtungsortes stand; optisch wäre er also nur im Zeitraum zwischen Auf- und Untergang zu beobachten gewesen. Daß die Signale oft lange vorher und nachher empfangen werden konnten, ist ebenfalls eine Folge des Vorhandenseins der Ionosphäre.

Fig. 70 zeigt schließlich noch eine Dopplerkurve mit ionosphärischen Störungen, die bei bestimmten Richtungen der ankommenden Strahlen auftraten.

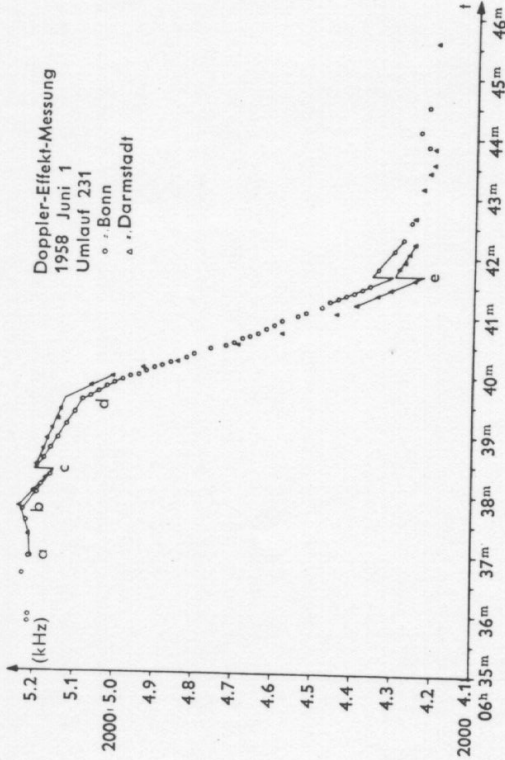


Fig. 70. Gleichzeitig an zwei Empfangsstationen aufgetretene ionosphärische Störungen in einer Dopplereffektkurve von Sputnik III.

4. Radarbeobachtungen

Das technisch hochentwickelte Radarortungsverfahren wird ebenfalls mit Erfolg zur Beobachtung von Satelliten angewandt - es ist, abgesehen von optischen Beobachtungen, die einzige Möglichkeit der Beobachtung von Satelliten ohne eigenen Sender (etwa Trägeraketen) oder von Satelliten nach Aussetzen des Senders. Das Prinzip besteht ja darin, die Laufzeit der von einer Bodenstation ausgesandten Kurzwellenimpulse auf dem Weg zum Satelliten und nach Reflexion zurück zu einem Empfänger zu messen. Das liefert direkt die Distanz („range“), wobei wieder Fehler infolge ionosphärischer Störungen auftreten können. Aus einer Folge rasch aufeinanderfolgender Impulse erhält man die Distanzänderung pro Zeiteinheit („range rate“), die weniger systematisch verfälscht sein wird als die Distanz selbst.

Werden dieselben Signale außerdem an zwei weiteren, von der ersten Station möglichst weit entfernten Stationen empfangen und die Zeitunterschiede des jeweiligen Empfangs gemessen, dann lassen sich

außer der Distanz von der Hauptstation auch zwei Richtungskosinusse bestimmen und damit der Ort im Raum. Die Genauigkeit der Distanzmessung ist etwa $1:10^6$, d.h. eine Distanz von 1000 km läßt sich, von Störungen durch die Ionosphäre abgesehen, auf 1 m genau festlegen. Die Winkelgenauigkeit hängt von der Basislänge und der Stellung des Satelliten zur Basis ab; sie kann in sehr günstigen Fällen an die Genauigkeit optischer Methoden herankommen.

Zum Empfang der reflektierten Wellen braucht man Antennen, die dem Satelliten bei seiner Bewegung folgen können, die also nach allen Richtungen drehbar sind. Hierfür eignen sich am besten die auch in der Astronomie benutzten Parabolspiegelantennen, die um zwei Achsen drehbar aufgestellt sind.

Fig. 71 zeigt die Verteilung der von den USA benutzten, meist mit Radar ausgerüsteten Stationen zur Beobachtung bemannter Satelliten. Die 3 eingezeichneten Projektionskurven entsprechen der Bahn bei der dreimaligen Erdumkreisung des amerikanischen Astronauten J. H. Glenn am 20. 2. 1962. Die Bahndaten für diesen Satelliten 1962 γ waren: $U = 88^m 2$, $i = 32^m 5$, $H_{Pe} = 157$ km, $H_{Ap} = 256$ km.

5. Bahnbestimmung

Das Problem der Bahnbestimmung, d. h. der Bestimmung der 6 Elemente einer Satellitenbahn aus Beobachtungen kann hier nur unter

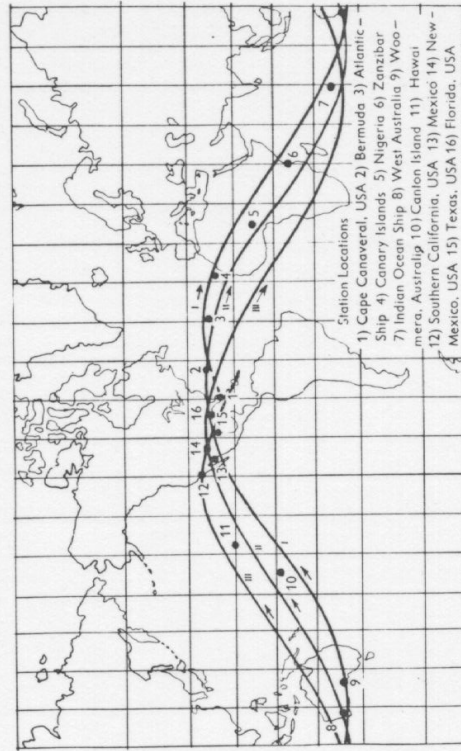


Fig. 71. Verteilung der von den USA benutzten Stationen zur Beobachtung (meist durch Radar) von bemannten Satelliten. Die drei eingezeichneten Kurven entsprechen den dreimaligen Erdumkreisungen von J. H. Glenn (20. 2. 62) und M. S. Carpenter (24. 5. 62).

allgemeinen Gesichtspunkten besprochen werden. Die Vielzahl der Beobachtungsmöglichkeiten läßt auch eine Vielzahl von Bahnbestimmungsmethoden zu. Prinzipiell braucht man mindestens 6 voneinander unabhängige Beobachtungsdaten, um die 6 Elemente $i, \Omega, a, e, \omega, M_0$ zu bestimmen. Welcher Art diese Daten sind, ist theoretisch einerlei, in der Praxis, hinsichtlich der Genauigkeit der Ergebnisse, allerdings nicht. Das Problem der Bahnbestimmung aus 6 Beobachtungen ist kein rein geometrisches Problem; um sich das klarzumachen, denke man sich den einfachen Fall, daß von einem Beobachtungsort aus während eines Durchgangs zwei vollständige Orte des Satelliten im Raum, etwa durch Radarmessungen, gewonnen wurden, d. h., es seien zu den Zeiten t_1 und t_2 die topozentrischen Koordinaten $\Delta_1, \alpha_1, \delta_1$ bzw. $\Delta_2, \alpha_2, \delta_2$ bekannt. Dabei kann die zweite Messung auch von einem anderen Beobachtungsort stammen, für den der Durchgang später erfolgt, so daß die Zeitdifferenz $t_2 - t_1$ größer ist, als dies bei Beobachtungen vom gleichen Ort aus möglich ist. Die Genauigkeit der Ergebnisse wird dadurch erhöht. Es sind also zwei topozentrische Ortsvektoren bekannt, die sich, da auch die geozentrischen Ortsvektoren der Beobachtungsorte ($\varrho, \vartheta, \beta$) zu den beiden Zeitpunkten t_1 und t_2 bekannt sind, nach (5) in geozentrische Ortsvektoren r, α, δ des Satelliten umrechnen lassen. Die Lage der Bahnebene (d. h. i und Ω) ist dann sofort rein geometrisch durch elementare Rechnung bestimmbar und man kann sich auf die Ableitung der restlichen 4 Elemente, die die Bewegung in der Ellipse charakterisieren, beschränken. Hierzu stehen 4 Daten zur Verfügung, nämlich r_1 und r_2 und zwei Winkel in der Bahnebene, für die man etwa u_1 und u_2 nehmen kann, d. h. die Winkel von r_1 und r_2 gegenüber der Knotenlinie, die nach Bestimmung von i und Ω aus (18) errechnet werden können. Es gilt dann zweimal die Ellipsengleichung:

$$r_1 = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(u_1 - \omega)} \quad \text{und} \quad r_2 = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(u_2 - \omega)}$$

Unbekannt sind in diesen Gleichungen a, e, ω . Rein geometrisch ist also die Lösung nicht eindeutig, da es unendlich viele Ellipsen gibt, die beiden Gleichungen genügen, d. h. deren Brennpunkt im Erdmittelpunkt liegt und die in den Richtungen u_1 und u_2 die Radienvektoren r_1 und r_2 haben. Die „richtige“ Ellipse ist erst durch das 2. und 3. Keplersche Gesetz festgelegt: es ist die Ellipse, in der sich der Satellit vom Ort 1 zum Ort 2 in der Zwischenzeit $t_2 - t_1$ bewegt. Die mathematische Formulierung dieser Bedingung ist kompliziert. Man kann zum Verständnis der Möglichkeit, die „richtige Keplersche Ellipse“ zu finden, etwa folgende Überlegung anstellen: Man nimmt zunächst ω beliebig an, rechnet aus den beiden Gleichungen Werte für a und e aus und mit

$v = u - \omega$ die beiden Werte für die wahre Anomalie. Dann liefert (14) die zugehörigen Werte E_1 und E_2 der exzentrischen und weiter (13) die Werte M_1 und M_2 der mittleren Anomalie (oder aus Tabellen sofort M aus v). Der Quotient $\frac{M_2 - M_1}{t_2 - t_1}$ ist nun die mittlere Bewegung n pro Zeiteinheit und diese muß nach (9) die Bedingung erfüllen:

$$n^2 a^3 = GM = \mu.$$

Der Wert von ω muß so lange variiert werden, bis diese Gleichung erfüllt ist.

Schwieriger ist das Problem, falls keine Messungen der Distanz Δ vorliegen. Man braucht dann drei Richtungen, etwa 3α - und 3δ -Werte zu drei verschiedenen Zeiten, entweder von einem, zwei oder drei Beobachtungsorten aus gemessen. Es liegt dann das klassische Problem der Bahnbestimmung aus drei Positionen vor, wie es von Gauß zum ersten Mal gelöst und seitdem in der Astronomie zu ungezählten Malen durchgeführt wurde, um Planetenbahnelemente abzuleiten. Schließlich sei noch ein drittes Verfahren erwähnt: werden an einem Ort in rascher Folge Werte von Δ, α und δ (oder auch A und h) gemessen, dann kann man daraus für einen bestimmten Zeitpunkt Δ, α, δ und $\dot{\Delta}, \dot{\alpha}, \dot{\delta}$ (zeitliche Änderungen) herleiten, d. h. den Orts- und Geschwindigkeitsvektor für diesen Zeitpunkt. Aus diesen 6 Daten lassen sich aber nach 3.6 leicht die Bahnelemente berechnen. Liegen keine Δ -Messungen mittels Radar vor, sondern nur Richtungsmessungen, dann müssen die Werte $\alpha, \delta, \dot{\alpha}, \dot{\delta}, \ddot{\alpha}, \ddot{\delta}$ für einen bestimmten Zeitpunkt abgeleitet werden und aus diesen die Elemente, was natürlich kompliziert ist. In der Astronomie ist dieses Verfahren als Methode von Laplace bekannt.

Die soeben beschriebenen Methoden dienen (neben einigen Variationen) zur Bestimmung einer ersten Bahn. Nach gegligtem Start eines Satelliten wird man versuchen, möglichst rasch zu genäherten Bahnelementen zu gelangen, wobei man zunächst auch Abschlußdaten mit verwenden kann, um durch Vorausberechnung einer Ephemeride und deren Weitergabe an andere Beobachtungsstationen zusätzliche Beobachtungen zur Sicherung und Verbesserung der ersten Näherung zu gewinnen. Das ist besonders wichtig bei einem benannten Satelliten. Daß solche Rechnungen in der erforderlichen kurzen Zeit nur unter Verwendung moderner Rechenanlagen durchzuführen sind, ist verständlich.

Hat der Satellit eine oder mehrere Erdumkreisungen vollendet, dann ist seine Umlaufzeit und damit auch die große Halbachse sehr sicher bekannt. Weitere Beobachtungen dienen nun dazu, die ersten Elemente zu verbessern. Dazu werden die Beobachtungsergebnisse verglichen mit den aus den ersten Elementen für den jeweiligen Beobachtungszeit-

punkt berechneten Örtern und aus den Differenzen „Beobachtung minus Rechnung“ Korrekturen der Elemente abgeleitet. So liefert z. B. jede neue Positionsmessung ein $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$, das in eine Bedingungsgleichung von der Art (nur für α angeschrieben):

$$\Delta\alpha = \sum_{i=1}^{i=6} \frac{\partial\alpha}{\partial E_i} \Delta E_i$$

eingesetzt werden kann, wobei E_i irgendeines der 6 Elemente bedeutet.

Die Koeffizienten $\frac{\partial\alpha}{\partial E_i}$ sind aus der Theorie bekannte, mehr oder weniger komplizierte Funktionen der Bahnelemente und der Zeit. Eine größere Zahl solcher Gleichungen liefert durch Ausgleichung die gesuchten Elementverbesserungen ΔE_i .

Werden auf diese Weise Elemente aus Beobachtungen abgeleitet, die sich über einen gewissen Zeitraum, etwa bis zu einigen Tagen, erstrecken, dann ist es natürlich erforderlich, die Änderungen der Elemente infolge der Störungen zu berücksichtigen. Mit den aus den ersten Bahnbestimmungen abgeleiteten Elementen lassen sich die Störungseinflüsse berechnen und eliminieren. Die Elemente, die man dann erhält und die für einen bestimmten Zeitpunkt innerhalb des jeweils benutzten Beobachtungszeitraumes gelten, heißen mittlere Elemente, im Gegensatz zu den oskulierenden Elementen, die man ihrer Definition gemäß aus Beobachtungen erhalte, die sich nur über ein sehr kurzes Zeitintervall (streng genommen einen Zeitmoment) erstrecken.

Bei der Unsicherheit in der Berücksichtigung des Luftwiderstands und da auch die Koeffizienten $J, H, K \dots$ in dem Ausdruck für das Erdfeld noch nicht mit hinreichender Sicherheit bekannt sind, ist es nicht möglich, aus Beobachtungen, mögen sie noch so gut sein, ein Elementensystem herzuleiten, das über einen Zeitraum von einigen Wochen oder Monaten gültig bleibt. Liegen von einem Satelliten laufend Beobachtungen vor, dann wird man mittlere Elemente jeweils nur aus den Beobachtungen einiger weniger Tage bestimmen. Diese unterscheiden sich noch durch langperiodische und besonders säkulare Glieder voneinander, während die kurzperiodischen, durch die Erdadplattung verursachten Glieder und kurzzeitige Störungen, verursacht durch rasch verlaufende Luftdichteschwankungen, eliminiert bzw. herausgemittelt sind. Durch den Vergleich der zeitlich aufeinanderfolgenden Werte eines Elements können nun dessen säkulare Änderungen bestimmt werden. In der Praxis faßt man die Einzelwerte eines Elements über einen längeren Zeitraum, etwa einen Monat zusammen und versucht sie durch Ausgleichung nach der Zeit in folgender Form darzustellen:

$$E_{i,t} = E_{i,0} + a_i (t - t_0) + b_i (t - t_0)^2,$$

wobei wieder E_i für eines der 6 Elemente steht, $E_{i,0}$ sein Wert für den Zeitpunkt t_0 , a_i seine säkulare Änderung ist und b_i die Änderung von a_i während dieses Zeitraums charakterisiert. Mit diesem ausgeglichenen Elementensystem lassen sich nun die Beobachtungen dieses Zeitraums im Mittel gut darstellen.

Als Beispiel werde aus der Fülle der vom Astrophysical Observatory, Smithsonian Institution in Cambridge, Massachusetts, publizierten Elemente künstlicher Satelliten die von Explorer VII für Juni 1961 herausgegriffen und besprochen. Aus 177 in diesem Zeitraum verfügbaren Beobachtungen wurden zunächst mittlere Elemente in Abständen von 4 zu 4 Tagen abgeleitet und aus diesen durch Ausgleichung folgendes Elementensystem (hier etwas vereinfacht wiedergegeben):

$$\begin{aligned} \text{Epoche } t_0 &= 37464.0 \text{ MJD} \\ i &= 50^\circ 306 \\ \Omega &= 119^\circ 25 \\ \omega &= 325^\circ 82 + 3.412 (t - t_0) + 0.58 \cdot 10^{-4} (t - t_0)^2 \\ e &= 0.03636 + 0.83 \cdot 10^{-5} (t - t_0) \\ M &= 0.3399 + 14.2302 (t - t_0) + 0.81 \cdot 10^{-5} (t - t_0)^2 + \\ &\quad + 0.18 \cdot 10^{-6} \cdot (t - t_0)^3. \end{aligned}$$

Die Epoche t_0 ist in der Julianischen Tageszählung (siehe 1.3) gegeben, wobei die beiden ersten Ziffern 24 weggelassen sind, und entspricht dem Kalenderdatum 1961 Juni 13.0 WZ; $(t - t_0)$ ist in Tagen zu rechnen.

Beim Vergleich mit den in 2.7 für Okt. 1959 angegebenen Elementen stellt man zunächst fest, daß i nahezu gleich ist, e , wie zu erwarten, abgenommen hat (bei Ω und ω kann man wegen ihrer raschen Veränderung nicht ohne weiteres Vergleiche anstellen), und daß weder U noch a angegeben sind, dafür aber die mittlere Anomalie M in anderer Schreibweise, und zwar nicht in Grad, sondern in Einheiten des Vollkreises. Das konstante Glied der rechten Seite ist M_0 , die mittlere Anomalie zur Epoche t_0 , der Koeffizient von $(t - t_0)$ ist, wie man leicht überlegt, die Zahl der anomalistischen Umläufe pro Tag zur Zeit t_0 .

Nach Multiplikation mit 360 erhält man M in Grad:

$$M = 122^\circ 38 + 5122^\circ 87 (t - t_0) + 2^\circ 9 \cdot 10^{-3} (t - t_0)^2 + 0^\circ 65 \cdot 10^{-4} (t - t_0)^3.$$

Differentiation nach t liefert die mittlere anomalistische Bewegung pro Tag und nach Division durch 1440 pro Minute: (ohne das letzte Glied)

$$n_T [\text{Grad/Min.}] = 3.55755 + 4.0 \cdot 10^{-6} (t - t_0)$$

und daraus weiter die Umlaufzeit

$$U_T = \frac{360}{n_T} = 101^m 19.32 - 1^s 14 \cdot 10^{-4} (t - t_0).$$

Daß sie seit 1959 abgenommen hat, ist zu erwarten; auch der negative Koeffizient von $(t - t_0)$ entspricht dem. Siehe auch Fig. 49. Nach (76) leitet man daraus zunächst U_0 ab:

$$U_0 = U_T - 0^m 0073 = 101^m 18.59,$$

und nach dem 3. Keplerschen Gesetz (11) ein $a_0 = 7192.9$ km. Dieses a_0 ist identisch mit dem in 5.7 definierten \bar{r} , der mittleren geozentrischen Entfernung des Satelliten. Die Werte U_0 und a_0 gelten zwar für den

Zeitpunkt t_0 , doch soll der Index 0 hier nicht den Zeitpunkt t_0 charakterisieren. Daß der Koeffizient von $(t - t_0)$ bei e positiv ist, obwohl doch e mit der Zeit abnimmt, ist ein rein rechnerisches Ergebnis der Ausgleichung; der Koeffizient ist so klein, daß er in dem relativ kurzen Zeitintervall von einem Monat nur unsicher bestimmt und leicht durch Beobachtungsfehler verfälscht werden kann.

LITERATURVERZEICHNIS

1. Allgemeine astronomische Literatur:

- MEYERS Handbuch über das Weltall (mit einem eigenen Kapitel über künstliche Satelliten und Raumfahrt) Bibliogr. Inst., Mannheim 1961.
 F. BECKER, Einführung in die Astronomie I = BI Hochschultaschenbuch Nr. 7, Bibliogr. Inst., Mannheim 1960.
 A. DANJON, Astronomie Générale; Sennac, Paris 1959.
 STRÖMGREN, Lehrbuch der Astronomie, Springer, Berlin 1933.
 K. STUMPF, Astronomie; Das Fischer Lexikon Nr. 4, 1957.
 O. STRUVE, Astronomie; Walter de Gruyter & Co, Berlin 1962.

2. Bahnrechnung und Himmelsmechanik:

- J. BAUSCHINGER, Bahnbestimmung der Himmelskörper, W. Engelmann, Leipzig 1928.
 G. STRACKE, Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, Springer, Berlin 1929.
 F. R. MOULTON, Einführung in die Himmelsmechanik, Teubner, Leipzig 1927.
 K. STUMPF, Himmelsmechanik I, VEB Deutscher Verlag d. Wissenschaft, Berlin, 1959.
 W. M. SMART, Celestial Mechanics, Longmans, London 1960.
 D. BROUWER, G. CLEMENCE, Methods of Celestial Mechanics, Academic Press, New York, London 1961.
 R. BAKER, M. W. MAKEMSON, An Introduction to Astrodynamics, Academic Press, New York, London 1960 (behandelt speziell Satellitenbahnen und Raumfahrt).
 F. TISSERAND, Traité de mécanique céleste, Gauthier-Villars, Paris 1891 (auch heute noch das Standardwerk über Himmelsmechanik).

3. Geophysik:

- J. BARTELS, Geophysik, Das Fischer Lexikon Nr. 20, 1960.
 H. S. JEFFREYS, The Earth, Cambridge Univers. Press 1958.
 B. GUTENBERG, Handbuch der Geophysik, Bornträger, Berlin 1930-1950.
 FLÜGGE, Handbuch der Physik, Bde. 47 und 48. Springer 1956/57.

LANDOLT-BÖRNSTEIN, Zahlenwerte und Funktionen Bd. 3, Springer 1952.
G. P. KUPFER, The Earth as a Planet = The Solar System Bd. 2, Univ. of Chicago Press 1954.

F. R. HELMERT, Höhere Geodäsie II, Teubner, Leipzig 1884.

4. Spezielle Publikationen über Satellitenbahnen:

In den letzten Jahren sind zahlreiche Publikationen über Satellitenbahnen in folgenden Zeitschriften erschienen (Auswahl): Astronomical Journal, Monthly Notices of the Royal Astron. Society, Geophysical Journal of the Royal Astron. Society, Journal of the British Interplanetary Society, Proceedings of the Royal Society of London, Science, Astronautica Acta, Mitteilungen der Universitäts-Sternwarte Bonn, Astr. Journal der Acad. d. Wiss. der UdSSR.

Von großer Wichtigkeit außerdem:

Smithsonian Institution, Astrophysical Observatory (Cambridge 38, Massachusetts): Research in Space Science, Special Reports.

Berichte über die „Internationalen Astronautischen Kongresse“ I bis XI, Springer, Wien, 1950 bis 1960.

Space Research I und II; Proceedings of the First (bzw. Second) International Space Science Symposium (Cospar-Berichte). North Holland Publishing Company 1960 und 1961.

ABBILDUNGS-QUELLENACHWEIS

Fig. 41 G. P. Taratynova, „Über die Bewegung von künstlichen Satelliten im nicht-zentralen Schwerfeld der Erde unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes“, in „Künstliche Erdsatelliten“, 2. Sonderband der Fortschritte der Physik, Akademie-Verlag, Berlin 1959.

Fig. 42 R. C. Nigam, The orbits of the satellites 1959 α_1 and 1959 α_2 and the perturbations on the perigee distance of 1959 α_1 ; Research in Space Science, Special Report Nr. 81, Smithsonian Institution, Astrophysical Observatory, Cambridge 38.

Fig. 49 D. G. King-Hele and Mrs. D. M. C. Walker „Upper-atmosphere density from satellite orbits“, Space Research II. Proceedings of the Second International Space Science Symposium, Florenz 1961, edited by H. C. van de Hulst, C. de Jager, A. F. Moore, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1961.

Fig. 50 H. K. Paetzold und H. Zschörner „Bearings of Sputnik III and the variable acceleration of satellites“, Space Research I. Proceedings of the First International Space Science Symposium, Nizza 1960, edited by H. Kallmann Bijl, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1960.

Fig. 51 W. Priester und H. A. Martin „Solare und tageszeitliche Effekte in der Hochatmosphäre aus Beobachtungen künstlicher Erdsatelliten“, Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen Nr. 547 = Mitteilungen der Universitätssternwarte Bonn Nr. 29, Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen 1960.

Fig. 52, 54 H. K. Paetzold „Zustand und Variationen der hohen Atmosphäre nach Satellitenbeobachtungen“, Raketentechnik und Raumfahrtforschung, Heft 4, Stuttgart, Okt.-Dez. 1961, hg. von der Deutschen Gesellschaft für Raketentechnik und Raumfahrt, Stuttgart-Zuffenhausen.

Fig. 53 Luigi G. Jacchia „Satellite Drag during the Events of November 1960“, in Space Research II; Proceedings of the second international Space Science Symposium, Florenz 1961. Edited by H. C. van de Hulst, C. de Jager, A. F. Moore, North-Holland Publishing Company Amsterdam 1961.

Fig. 55 *H. K. Pätzold*, „Die Luftdichte in der irdischen Ionosphäre und Exosphäre“, Die Naturwissenschaften, Springer, Bd. 48, Heft 2., 1961.

Fig. 60 *P. Musen, R. Bryant, A. Bailie* „Perturbations in perigee height of Vanguard I“, Science 131, 935 (1960).

Fig. 62 *George Veis* and *Fred L. Whipple* „Experience in precision optical tracking of satellites for geodesy“, Space Research II. Proceedings of the Second International Space Science Symposium, Florenz 1961, edited by van de Hulst, G. de Jager, A. F. Moore, North Holland Publishing Company, Amsterdam 1961.

Fig. 64 *H. K. Pätzold* und *H. Zschörner* „Radiobeobachtungen auf 20 MHz der ersten russischen Erdsatelliten“, Telefunken-Zeitung, Jahrgang 31, Heft 120 (Juni 1958).

Fig. 66, 67, 71 *Gerald M. Truszynski* „Radio tracking of earth satellites“, Space Research II (Proceedings of the Second International Space Science-Symposium, Florenz 1961, edited by H. C. van de Hulst, C. de Jager, A. F. Moore, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1961).

Fig. 69 *Priester, Bennewitz, Lengrüssler* „Radiobeobachtungen des ersten künstlichen Erdsatelliten“, Wissenschaftliche Abhandlungen der Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, Band 1, Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen 1958.

Fig. 70 *G. Hergenbahn* „Die Bahn des künstlichen Erdsatelliten 1958 δ_2 “, Mitteilungen der Universitätssternwarte Bonn Nr. 19, Westdeutscher Verlag Köln und Opladen, 1959.

SACHVERZEICHNIS

- A**
 Abbremsung durch die Atmosphäre 98,
 100
 — durch Rückstoß 56
 Abplattung der Erde 11, 75
 — der Flächen gleichen Gravitations-
 potentials 73
 Abschubbedingungen 58
 Änderung der Bahnelemente 60
 — infolge Abplattung der Erde 67
 — infolge Luftwiderstand 97
 — infolge Strahlungsdruck 119
 Anfangsbedingungen 55, 58
 Akkommodation 98
 Anomalie 28
 Antennen 132, 139
 Apsidenlinie 86
 Drehung der — 83, 122
 Apogäum 28
 Atmosphäre 19, 110
 — Dichtebestimmung aus Satelliten-
 beobachtungen 105, 108
 — zeitliche Änderung der Dichte 110
 — Zustandsgrößen 21
 Äquator 11
 Elliptizität des — 13
 Äquatorbahn 26, 87
 Äquipotentialflächen 73, 75
 Argument des Perigäums 23
 Azimut 16, 37
- B**
 Bahnbestimmung 139
 — elemente 23, 33, 40, 143
 — schrumpfung 100
 — verbesserung 142
 Ballon-Satellit 117
 Beobachtungen von Satelliten
 optische 127
 im Radiowellenbereich 131
- Beschleunigungskomponenten** 49, 61
 Bezeichnung von Satelliten 22
 Breite eines Erdortes 12
 Bremschluß 9, 58
- C**
 Clairaut'sches Theorem 76
 Coriolisbeschleunigung 50
- D**
 Dämmerungsgrenze 40
 Deklination 14
 Deviationsmoment 70
 Dichte der Atmosphäre 20
 — Bestimmung aus der Abbremsung von
 Satelliten 105, 108
 Dichteskalenhöhe 20, 108
 Differentialgleichungen der Bewegung
 — in rechtwinkligen Koordinaten 49, 77
 — in Polarkoordinaten 49
 Differentialgleichungen für die Ände-
 rung der Bahnelemente 65
 Dopplereffekt 135
 Drehimpuls 50
 Drehung der Bahnebene 63, 80
 — der Bahnellipse (der Apsidenlinie)
 83, 122
- E**
 Echo I 33, 46, 131
 Elektrostatische Aufladung eines Satel-
 liten 98
 Elemente einer Satellitenbahn 23
 — mittlere — 142
 — oskulierende — 61
 Ellipse 28
 Energie eines Satelliten 51, 53, 101, 121
 Energiesatz 50, 77
 Entweichgeschwindigkeit 53
 Epoche 23, 40, 143
 Erde, Dimension 11

- Erde, Figur 11, 75
 — Gravitationsfeld 67
 — Rotation 18, 32, 70
 — Trägheitsmomente 70
 Exosphäre 19
 Explorer I 109, 115
 — VII 40, 81, 86, 143
 — XII 32
 Exzentrizität 12, 23
- F**
 Flächen gleichen Gravitationspotentials 73
 Flächenkonstante 52, 95
 Flächensatz 26, 50, 77, 95
 Frühlingspunkt 13
- G**
 Gasgleichung 19
 Geschwindigkeit
 — in der Ellipse 52
 — im Apogäum 54
 — im Perigäum 54
 — mittlere (Kreisbahn —) 25
 — parabolische 53
 — Komponenten 52
 Gravitationsbeschleunigung 49, 75, 77, 126
 — konstante 24, 126
 — potential 67
 Greenwich 15, 18
 Grenzfrequenz 134
 Größenklasse 129
- H**
 Harmonische Funktion 72
 Hauptträgheitsachsen 70
 Helligkeit eines Satelliten 129
 Himmelspol 13
 Hochatmosphäre 19, 110
 Höhe über der Erdoberfläche 25, 38
 — über dem Horizont 16, 38
 Hydrostatisches Gleichgewicht 20
 Hyperbelbahn 53, 56
- I**
 Integral der lebendigen Kraft 50
 Interferenzmethode beim Empfang von Kurzwellsignalen 132
 Ionosphäre 21, 134
 Störungen durch die — 137
- J**
 Jahrbuch, astronomisches 18
 Jahresseffekt 115
- Julianisches Datum 19
 Jupitermond 89
- K**
 Keplersche Bewegung 26
 — Ellipse 140
 — Gleichung 28, 58
 Keplersches 2. Gesetz 26, 50, 95
 — 3. Gesetz 24, 52, 91, 100
 Knoten 23
 — drehung 80
 — umlaufzeit 41, 91
 Koordinaten 13
 — transformation 16
 Korpustularstrahlung 111, 113
 Kreisbahn 24, 32, 53, 99
 Kugelfunktionen 72
 Kurven gleichen Abstandes und gleichen Azimuts an der Erdoberfläche 37
- L**
 Länge eines Erdortes 13, 18
 Lebensdauer eines Satelliten 105
 Lotabweichung 12
 — richtung 12
 Luftwiderstand 97
- M**
 Magnetische Störungen 113
 Maßstabhöhe 20
 Meridian 11, 13
 — durchgang 17, 135
 Minitrackstationen 133
 Mittlere Bewegung 24°
 Mittlere Sonne 17
 Molekulargewicht der atmosphärischen Gase 19, 21
 Mond 26
- N**
 NASA 40
 Nautical Almanac 18, 34, 41
 Nautisches Dreieck 16
 Niveaufläche 73
 Niveausphäroid 73
- O**
 Oskulierende Ellipse 61
 Ortsvektor 58, 140
- P**
 Parabelbahn 55, 56
 Parabolische Geschwindigkeit 53
 Paradoxon 101, 126
- Parameter einer Ellipse 28, 89
 Phasenkoeffizient 131
 Perigäum 23, 28
 Polarlicht 113
 Polbahn 37, 81, 89, 96
 Polhöhe 12
 Potential 67
 Präzession der Erdachse 14
 — der Satellitenbahnebene 80
 Projektionsbahn 30
- Q**
 Quarzuhren 17, 128
 Querschnittsbelastung 98
- R**
 Radarmessungen 138
 Radiageschwindigkeit 136
 Radiusvektor 26, 96
 Radiobeobachtungen 131
 Rektaszension 14
 Richtungsmessungen 131, 139
 Resonanzfall 124
 Rotation der Erde 18, 70
 Rotationsellipsoid 11, 73
- S**
 Säkulare Störungen 81
 Schattenein- und -austritt 44
 Schatteneclipse 45
 Schwerbeschleunigung 77
 Schwerkraft 12, 49
 Sichtbedingungen 44, 127
 Sidrische Umlaufzeit 95
 Skalenhöhe 20, 103, 109
 Smithsonian Institution, Astrophysical Observatory 143
 Solarer Effekt 111
 Solarkonstante 119
 Sonne, Aktivität 111
 — Eruptionen 113
 — Flecken 107, 112
 Spiralbahn 101
 Sputnik I 101, 137
 — II 81, 86, 107, 128
 — III 130
 Sterntag 18
 — zeit 15, 18
 Störende Kraft 60
 Störungen 60
 — periodische 81, 89
 — säkulare 81
 — durch die Erdatmosphäre 77, 80

- Störungen, durch den Luftwiderstand 99
 — durch Sonne und Mond 125
 — durch den Strahlungsdruck 119
 — der Apsidenlinie 83, 122
 — der Exzentrizität 89, 102
 — der großen Achse 89, 102, 121
 — der Knotenlinie 80
 — der Neigung 82
 — des Parameters 89
 — des Radiusvektors 96
 Strahlenbrechung 44, 134
 Strahlungsdruck 119
 Stundenkreis 17
 — winkel 17
 Subsatellitenpunkt 30
- T**
 Tabellen für Bahnrechnungen 28
 Tag 17
 Tag-Nacht-Effekt 111, 113
 Topozentrische Koordinaten 15
 Trägheitsmomente der Erde 70
- U**
 Umlaufzeit 24, 91, 100
 —, Änderung durch die Erdatmosphäre 91
 —, Änderung durch den Luftwiderstand 100, 105, 108
 —, Änderung durch den Strahlungsdruck 121
 — anomalistische 40, 91
 — Knoten — 41, 91
 Unsymmetrie des Äquators 13, 70
 — zwischen Nord- und Südhälfte 91
- V**
 Vanguard I 115, 125, 131
 — II 91
 Variation der Bahnelemente 60.
- W**
 Weltzeit 17
 Widerstandskoeffizient 98
 Winkelmessung 127, 133, 139
- Z**
 Zeitmarken 127
 — signale 17
 — zählung 17
 Zenit 13
 — distanz 16
 Zentrifugbeschleunigung 50, 76
 Zweikörperproblem 49